Zbirka rešenih zadataka iz Kvantne teorije polja

Voja Radovanović
Fizički fakultet
Beograd, 2001.

Sadržaj

Predgovor

Kvantna teorija polja je mlada naučna disciplina koja u sebi objedinjuje kvantne i relativističke fenomene. Danas postoji veliki broj udžbenika iz ove oblasti savremene fizike. Međutim, do sada se nije pojavila ni jedna zbirka zadataka (osim [7] koja se minimalno prepoklapa sa ovom Zbirkom). Kako u teoriji polja postoji dosta komplikovanog računa, studentima sigurno nije lako da steknu potrebnu računsku rutinu. Iz tog razloga sam odlučio da napravim jednu ovakvu Zbirku. Ona je rezultat rada sa studentima Fizičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu. U periodu od 1991-99 držao sam vežbe iz predmeta Kvantna teorija polja studentima četvrte godine Teorijsko-eksperimentalnog smera, a od 1999. vodim kurs Kvantne teorije polja I na poslediplomskim studijima studentima smera Teorijska fizika elementarnih čestica i gravitacija.

Polja se mogu kvantovati na dva načina. Prvi od njih je kanonski (operatorski) formalizam a drugi je primenom funkcionalnog integrala. Najčešće se u prvom semestru kursa teorije polja uči kanonski a u drugom funkcionalni formalizam. Ova zbirka zadataka obrađuje kanonsko kvantovanje polja. Zadaci koji se odnose na relativističku kvantnu mehaniku izdvojeni su u prvih nekoliko glava. U uvodu svake glave dat je kratak spisak formula više sa ciljem da se fiksiraju oznake nego da se "objasni" teorija. Preporučujem čitaocima da zadatke rešavaju samostalno i tek ako naiđu na problem da konsultuju rešenje.

Ovaj rukopis sigurno ne bi nastao da nisam imao podršku svojih kolega. U prvom redu bih se zahvalio recenzentima prof. dr Milutinu Blagojeviću i doc. dr Maji Burić koji su pažljivo pročitali ovaj rukopis i dali veliki broj korisnih primedbi. Duško Latas, asistent Fizičkog fakulteta je nacrtao sve slike u Zbirci i pomogao mi oko tehničke obrade teksta. Pored toga Duško mi je dao veliki broj korisnih sugestija oko formulacija i rešenja određenog broja zadataka. Marija Dimitrijević, koja je takodje asistent na našem Fakultetu, pažljivo je pročitala prvu i petu glavu ove zbirke i njene primedbe su

bile takođe korisne. Pored toga, studenti Mihailo Vanević, Marko Vojinović, Aleksandra Stojaković, Boris Grbić, Igor Salom, Irena Knežević, Zoran Ristivojević i Vladimir Juričić su rešili najveći deo zadataka iz ove Zbirke i na taj način bili svojevrsni kontrolori.

Molim čitaoce da mi sve primedbe dostave poštom ili na e-mail adresu datu ispod.

Voja Radovanović
Fizički fakultet
P. O. Box 368
11000 Beograd
Jugoslavija

e-mail: `rvoja@ff.bg.ac.yu`

Deo I

Zadaci

Lorentz-ova i Poincare-ova grupa

- Prostor Minkowski-og, M_4 je realan četvorodimenzioni vektorski prostor u kome je definisan metrički tenzor

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{1.A}$$

Vektori u ovom prostoru su $x = x^\mu \mathbf{e}_\mu$, gde su x^μ kontravarijantne komponente vektora u bazi

$$\mathbf{e_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \ \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \ \mathbf{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Kvadrat dužine četvorovektora u prostoru M_4 je $x^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$. Kvadrat intervala između bliskih tačaka x^μ i $x^\mu + dx^\mu$ ima oblik

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 . \tag{1.B}$$

Prostor M_4 je mnogostrukost u kojoj su x^μ globalne (inercijalne) koordinate. Kovarijantne komponente definisane su izrazom $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$.

- Lorentz-ove transformacije, $\Lambda : \mathrm{M}_4 \rightarrow \mathrm{M}_4$ ne menjaju dužinu vektora, tj. $x'^2 = x^2$, i imaju oblik

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu , \tag{1.C}$$

gde je Λ konstantna matrica. U zadatku 1.1 pokazaćemo da iz prethodnog uslova sledi da važi $\Lambda^T g \Lambda = g$. Kovarijantne komponente vektora transformišu se po pravilu

$$x'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu x_\nu \ . \tag{1.D}$$

- Neka je $u = u^\mu \mathbf{e}_\mu$ proizvoljan vektor u prostoru Minkowski-og[1], gde su u^μ njegove kontravarijantne komponente. Svakom vektorskom prostoru se može pridružiti dualni prostor. Dualna baza, θ^μ u ovom prostoru definisana je sa $\theta^\mu(u) = u^\mu$. Vektori u dualnom prostoru, $\omega = \omega_\mu \theta^\mu$ se nazivaju dualnim vektorima ili jedan-formama. Komponente dualnih vektora se transformišu kovarijantno pri Lorentz-ovim transformacijama. Skalarni proizvod vektora u i v iz M_4 dat je kao

$$u \cdot v = g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu = u^\mu v_\mu \ .$$

Tenzor tipa (m, n) u prostoru Minkowski-og je

$$T = T^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n}(x) e_{\mu_1} \otimes \dots \otimes e_{\mu_m} \otimes \theta^{\nu_1} \otimes \dots \otimes e^{\nu_n} \ .$$

Komponente ovog tenzora pri Lorentz-ovim transformacijama transformišu se po

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n}(x') = \Lambda^{\mu_1}_{\ \rho_1} \dots \Lambda^{\mu_m}_{\ \rho_m} (\Lambda^{-1})^{\sigma_1}_{\ \nu_1} \dots (\Lambda^{-1})^{\sigma_n}_{\ \nu_n} T^{\rho_1 \dots \rho_m}{}_{\sigma_1 \dots \sigma_n}(x) \ .$$

Kontravarijantni vektori su tenzori tipa $(1, 0)$, dok su kovarijantni vektori tenzori tipa $(0, 1)$. Metrika je tenzor tipa $(0, 2)$.

- Poincare-ove transformacije[2], (Λ, a) sastoje se od Lorentz-ovih transformacija i translacija tj.

$$(\Lambda, a)x = \Lambda x + a \ . \tag{1.E}$$

To su najopštije transformacije prostora Minkowski-og koje ne menjaju kvadrat intervala.

- U proizvoljnoj reprezentaciji elementi Poincare-ove grupe su

$$U(\omega, \epsilon) = e^{-\frac{i}{2} M_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + i P_\mu \epsilon^\mu} \ , \tag{1.F}$$

gde su $\omega^{\mu\nu}$ i $M_{\mu\nu}$ parametri odnosno generatori Lorentz-ove podgrupe, dok su ϵ^μ i P_μ parametri odnosno generatori translacija. Poincare-ova algebra data je u zadatku 11.

---

[1] U slučaju proizvoljne mnogustrukosti vektor $u(x)$ je element tangentnog prostora u tački x.

[2] Poincare-ove transformacije se često nazivaju i nehomogenim Lorentz-ovim transformacijama

- Simbol Levi-Civita-e, $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ je totalno antisimetričan tenzor. Koristićemo konvenciju po kojoj je $\epsilon^{0123} = +1$.

1.1 Pokazati da Lorentz-ove transformacije zadovoljavaju uslov $\Lambda^T g \Lambda = g$ kao i da čine grupu.

1.2 Data je infinitezimalna transformacija Lorentz-ove grupe:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu \ .$$

Pokazati da su infinitezimalni parametri $\omega_{\mu\nu}$ antisimetrični.

1.3 Pokazati da je

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} a^\alpha{}_\mu a^\beta{}_\nu a^\gamma{}_\lambda a^\delta{}_\sigma = \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \det A \ ,$$

gde su $a^\alpha{}_\mu$ matrični elementi matrice A.

1.4 Pokazati da su Kronecker–ov δ simbol i antisimetrični ϵ simbol form-invarijantni na Lorentz-ove transformacije.

1.5 Dokazati

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = - \begin{vmatrix} \delta^\mu{}_\alpha & \delta^\mu{}_\beta & \delta^\mu{}_\gamma & \delta^\mu{}_\delta \\ \delta^\nu{}_\alpha & \delta^\nu{}_\beta & \delta^\nu{}_\gamma & \delta^\nu{}_\delta \\ \delta^\rho{}_\alpha & \delta^\rho{}_\beta & \delta^\rho{}_\gamma & \delta^\rho{}_\delta \\ \delta^\sigma{}_\alpha & \delta^\sigma{}_\beta & \delta^\sigma{}_\gamma & \delta^\sigma{}_\delta \end{vmatrix}$$

i naći kontrakcije $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\beta\gamma\delta}$, $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\gamma\delta}$, $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\rho\delta}$, $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$.

1.6 Ako je $\sigma^\mu = (1, \vec{\sigma})$; $\bar{\sigma}^\mu = (1, -\vec{\sigma})$, gde je 1 jedinična 2×2 matrica, a $\vec{\sigma}$ su Pauli-jeve matrice onda je matrica $X = x_\mu \sigma^\mu$ hermitska matrica.

(i) Pokazati da transformacija

$$X \to X' = SXS^\dagger,$$

gde je $S \in \mathrm{SL}(2, \mathrm{C})$ opisuje Lorentz-ove transformacije četvorovektora $x^\mu \to \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$. Ovim je definisan jedan homomorfizam između Lorentz-ove grupe i $\mathrm{SL}(2, \mathrm{C})$ grupe.

(ii) Pokazati da je $x^\mu = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\bar{\sigma}^\mu X)$.

1.7 Pokazati da je $\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\bar{\sigma}^{\mu} S \sigma_{\nu} S^{\dagger})$, kao i da je $\Lambda(S) = \Lambda(-S)$, tj. da je veza između grupa SO(1, 3) i SL(2, C) dvoznačna.

1.8 Naći matrične elemente generatora Lorentz-ove grupe $M_{\mu\nu}$ u prirodnoj (definicionoj) reprezentaciji.

1.9 Ako definišemo $M_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M_{jk}$ i $N_k = M_{k0}$ pokazati da se komutacione relacije Lorentz-ove algebre

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho})$$

mogu prikazati i formi

$$[M_i, M_j] = i\epsilon_{ijl}M_l, \quad [N_i, N_j] = -i\epsilon_{ijl}N_l, \quad [M_i, N_j] = i\epsilon_{ijl}N_l.$$

Ako se dalje definiše $A_i = \frac{1}{2}(M_i + iN_i)$ i $B_i = \frac{1}{2}(M_i - iN_i)$ pokazati da važi

$$[A_i, A_j] = i\epsilon_{ijl}A_l, \quad [B_i, B_j] = i\epsilon_{ijl}B_l, \quad [A_i, B_j] = 0 \ .$$

Ovo povezuje Lorentz-ovu algebru i "dve" su(2) algebre: $\mathrm{so}(1,3)_{\mathrm{c}} = \mathrm{su}(2) \oplus \mathrm{su}(2)$. Ireducibilne reprezentacije Lorentz-ove grupe se mogu klasifikovati sa dva kvantna broja (j_1, j_2) koja upravo dolaze od "dve" su(2) grupe.

1.10 Data je transformacija Poincare-ove grupe (Λ, a):

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} + a^{\mu} \ .$$

Odrediti zakon množenja u grupi, tj. vrednost izraza $(\Lambda_1, a_1)(\Lambda_2, a_2)$; jedinični i inverzni element.

1.11 U Poincare-ovoj grupi pokazati:

(i) zakon množenja

$$U^{-1}(\Lambda, 0)U(1, \epsilon)U(\Lambda, 0) = U(1, \Lambda^{-1}\epsilon) \ ,$$

kao i da iz njega sledi

$$U^{-1}(\Lambda, 0)P_{\mu}U(\Lambda, 0) = (\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu}P_{\nu} \ .$$

Naći komutator $[M_{\mu\nu}, P_{\rho}]$.

(ii) da je

$$U^{-1}(\Lambda, 0)U(\Lambda', 0)U(\Lambda, 0) = U(\Lambda^{-1}\Lambda'\Lambda, 0) \ ,$$

i naći komutator $[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}]$.

(iii) $[P_\mu, P_\nu] = 0$.

1.12 Eksplicitnim računom proveriti komutacione relacije iz prethodnog zadatka, u reprezentaciji gde su vektori x prostora Minkowski-og reprezentovani kolonom $(x\ 1)^T$, a elementi Poincare-ove grupe (Λ, a) sa 5×5 matricom

$$\begin{pmatrix} \Lambda & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.13 Vektor Pauli-Lubanski-og definisan je sa $W_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}M^{\nu\lambda}P^\sigma$.

(i) Pokazati da je $W_\mu P^\mu = 0$ i $[W_\mu,\ P_\nu] = 0$.

(ii) Pokazati da važi $W^2 = -\frac{1}{2}M_{\mu\nu}M^{\mu\nu}P^2 + M_{\mu\sigma}M^{\nu\sigma}P^\mu P_\nu$.

(iii) Pokazati da W^2 i P^2 komutiraju sa generatorima Poincare-ove grupe, tj. oni su Casimir-ovi operatori grupe i kao takvi služe za klasifikaciju njenih ireducibilnih reprezentacija.

1.14 Pokazati

$$W^2 \mid \vec{p} = 0, m, s, \sigma\rangle = -m^2 s(s+1) \mid \vec{p} = 0, m, s, \sigma\rangle,$$

gde je $\mid \vec{p} = 0, m, s, \sigma\rangle$ vektor stanja čestice mase m, impulsa $\vec{p}$, spina s dok je σ treća komponenta spina. Ovo pokazuje smisao Casimir-ovog operatora W^2. Klasifikacija ireducibilnih reprezentacija Poincare-ove grupe vrši se dakle pomoću mase i spina.

1.15 Pokazati da važi

(i) $[M_{\mu\nu}, W_\sigma] = i(g_{\nu\sigma}W_\mu - g_{\mu\sigma}W_\nu)$,

(ii) $[W_\mu, W_\nu] = -i\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}W^\sigma P^\rho$.

1.16 Izračunati komutatore

(i) $[W_\mu, M^2]$

(ii) $[M_{\mu\nu}, W^\mu W^\nu]$.

(iii) $[M^2,\ P_\mu]$

(iv) $[\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}M_{\mu\nu}M_{\rho\sigma}, M_{\alpha\beta}]$

1.17 Malu grupu Lorentz-ove grupe čine one transformacije koje tzv. standardni impuls ostavljaju invarijantnim. U slučaju masene čestice za standardni impuls uzima se $(m, 0, 0, 0)$, a u slučaju bezmasene $(k, 0, 0, k)$. Pokazati da je mala grupa u slučaju masenih čestica SU(2), a u slučaju bezmasenih čestica E_2 grupa.

1.18 Pokazati da konformne transformacije, koje se sastoje od dilatacija:

$$x^\mu \to x'^\mu = e^\rho x^\mu \ ,$$

specijalnih konformnih transformacija (SKT)

$$x^\mu \to x'^\mu = \frac{x^\mu + c^\mu x^2}{1 + 2c \cdot x + c^2 x^2} \ ,$$

i elemenata Poincare-ove grupe, čine grupu. Naći komutacione relacije u ovoj grupi.

ZADACI 2

Klein-Gordon-ova jednačina

- Klein-Gordon-ova jednačina,

$$(\Box + m^2)\phi(x) = 0 \ , \tag{2.A}$$

je talasna jednačina slobodne relativističke čestice spina 0. Skalarno polje $\phi(x)$ se u odnosu na Lorentz-ove transformacije menja po pravilu $\phi'(\Lambda x) = \phi(x)$.

- Jednačina za česticu spina nula i naelektrisanja q u elektromagnetnom polju, A^μ dobija se smenom $\partial_\mu \to \partial_\mu + iqA_\mu$ u jednačini (2.A).

2.1 Rešiti Klein-Gordon-ovu jednačinu za slobodnu česticu.

2.2 Ako je ϕ proizvoljno rešenje Klein-Gordon-ove jednačine izračunati veličinu

$$Q = iq \int d^3x \left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) .$$

2.3 Hamiltonijan slobodnog realnog skalarnog polja je

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x [(\partial_t \phi)^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2] \ .$$

Odrediti vrednost hamiltonijana za opšte rešenje Klein-Gordon-ove jednačine.

2.4 Impuls slobodnog realnog skalarnog polja dat je sa

$$\vec{P} = -\int d^3x \partial_t \phi \nabla \phi \ .$$

Izračunati vrednost impulsa za opšte rešenje Klein-Gordon-ove jednačine.

2.5 Data je struja

$$j_\mu = i(\phi \partial_\mu \phi^* - \phi^* \partial_\mu \phi).$$

Pokazati da ona zadovoljava jednačinu kontinuiteta, tj. $\partial^\mu j_\mu = 0$.

2.6 Data je struja

$$j_\mu = i(\phi \partial_\mu \phi^* - \phi^* \partial_\mu \phi) - 2eA_\mu \phi^* \phi,$$

gde je ϕ rešenje Klein-Gordon-ove jednačine u spoljnjem elektromagnetnom potencijalu A_μ. Pokazati da ona zadovoljava jednačinu kontinuiteta $\partial_\mu j^\mu = 0$.

2.7 Naći energetski spektar skalarne čestice u $s-$stanju koja se nalazi u potencijalu

$$A^0 = \begin{cases} 0, & r < a \\ U_0, & r > a \end{cases},$$

gde je U_0 pozitivna konstanta a E energija čestice. Uzeti da važi uslov $(E + eU_0)^2 - m^2 < 0$.

2.8 Odrediti energetski spektar i funkcije stanja čestice spina 0 u konstantnom magnetnom polju $\vec{B} = B\vec{e}_z$.

2.9 Klein-Gordon-ova čestica mase m i energije E nailazi na barijeru

$$A^0 = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ U_0, & z > 0 \end{cases},$$

gde je U_0 pozitivna konstanta. Naći koeficijente refleksije i transmisije.

2.10 Skalarna čestica, mase m i naelektrisanja $-e$ kreće se u Coulomb-ovom polju teškog nepokretnog jezgra, naelektrisanog sa Ze. Naći energetski spektar takvog sistema. Ispitati nerelativistički limes.

2.11 Ispitati kako se Klein-Gordon-ova jednačina transformiše u odnosu na:

(i) Galilei-ove transformacije koordinata

$$t' = t, \ x' = x, \ y' = y, \ z' = z - vt,$$

(ii) Lorentz-ove transformacije koordinata.

2.12 Uvodeći dvokomponentnu talasnu funkciju $\begin{pmatrix} \theta \\ \chi \end{pmatrix}$, gde su komponente $\theta = \frac{1}{2}(\phi + \frac{i}{m}\frac{\partial\phi}{\partial t})$ i $\chi = \frac{1}{2}(\phi - \frac{i}{m}\frac{\partial\phi}{\partial t})$, napisati Klein-Gordon-ovu jednačinu u Schrödinger-ovoj formi.

2.13 Dijagonalizovati hamiltonijan iz zadatka 2.12. Naći nerelativistički limes hamiltonijana.

2.14 Odrediti operator brzine $\vec{v} = i[H, \vec{x}]$, gde je H hamiltonijan iz zadatka 2.12. Rešiti svojstveni problem operatora $\vec{v}$.

2.15 Ako se skalarni proizvod u prostoru dvokomponentnih funkcija definiše sa

$$(\psi_1,\ \psi_2) = \frac{1}{2}\int d^3x \psi_1^\dagger \sigma_3 \psi_2$$

(i) Pokazati da je hamiltonijan H iz zadatka 2.12 hermitski u odnosu na ovaj skalarni proizvod.

(ii) Naći očekivanu vrednost hamiltonijana $\langle H \rangle$, i operatora brzine $\langle \vec{v} \rangle$ u stanju $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ipx}$.

γ-matrice

- U prostoru M_4 γ-matrice definisane su sa

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \ . \tag{3.A}$$

- Dirac-ova reprezentacija γ-matrica je

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & -\mathrm{I} \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{3.B}$$

Druge reprezentacije se dobijaju iz Dirac-ove reprezentacije transformacijom sličnosti, $\gamma'_\mu = S\gamma_\mu S^{-1}$. Da bi matrica γ^0 bila hermitska, a matrice γ^i antihermitske potrebno je da matrica transformacije bude unitarna. Weyl-ova reprezentacija γ-matrica je

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \mathrm{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \ , \tag{3.C}$$

dok u Majorana reprezentaciji γ-matrice imaju oblik:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} i\sigma_3 & 0 \\ 0 & i\sigma_3 \end{pmatrix} \ ,$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} -i\sigma_1 & 0 \\ 0 & -i\sigma_1 \end{pmatrix} \ . \tag{3.D}$$

- Matrica γ^5 definisana je sa $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, dok je $\gamma_5 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$. U Dirac-ovoj reprezentaciji ona ima oblik

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ \mathrm{I} & 0 \end{pmatrix} \ .$$

- $\sigma_{\mu\nu}$ matrice definisane su sa

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \ .$$

3.1 Dokazati:

(i) $\gamma_\mu^\dagger = \gamma^0 \gamma_\mu \gamma^0$

(ii) $\sigma_{\mu\nu}^\dagger = \gamma^0 \sigma_{\mu\nu} \gamma^0$

(iii) $(\gamma_5 \gamma_\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma_5 \gamma_\mu \gamma^0$.

3.2 Pokazati da je:

(i) $\gamma_5^\dagger = \gamma_5 = \gamma^5 = \gamma_5^{-1}$

(ii) $\gamma_5 = -\frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$.

3.3 Dokazati:

(i) $\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0$

(ii) $[\gamma_5, \sigma^{\mu\nu}] = 0$.

3.4 Dokazati $\not{a}^2 = a^2$.

3.5 Proveriti sledeće identitete sa kontrakcijama:

(i) $\gamma_\mu \gamma^\mu = 4$,

(ii) $\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu = -2\gamma^\nu$,

(iii) $\gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu = 4g^{\alpha\beta}$,

(iv) $\gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\mu = -2\gamma^\gamma \gamma^\beta \gamma^\alpha$,

(v) $\sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} = 12$,

(vi) $\gamma_\mu \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^5 = -4$,

(vii) $\sigma_{\alpha\beta}\gamma_\mu\sigma^{\alpha\beta} = 0$,

(viii) $\sigma_{\alpha\beta}\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\alpha\beta} = -4\sigma^{\mu\nu}$,

(ix) $\sigma^{\alpha\beta}\gamma^5\gamma^\mu\sigma_{\alpha\beta} = 0$,

(x) $\sigma^{\alpha\beta}\gamma^5\sigma_{\alpha\beta} = 12\gamma^5$.

3.6 Proveriti sledeće izraze sa tragovima γ-matrica:

(i) $\mathrm{tr}\gamma_\mu = 0$,

(ii) $\mathrm{tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu) = 4g_{\mu\nu}$,

(iii) $\mathrm{tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma) = 4(g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})$,

(iv) $\mathrm{tr}\gamma_5 = \mathrm{tr}(\gamma_5\gamma_\mu) = \mathrm{tr}(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu) = 0$,

(v) $\mathrm{tr}(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma) = -4i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$,

(vi) $\mathrm{tr}(\not{a}_1 ... \not{a}_{2n+1}) = 0$, gde je $\not{a} = a^\mu\gamma_\mu$,

(vii) $\mathrm{tr}(\not{a}_1 ... \not{a}_{2n}) = \mathrm{tr}(\not{a}_{2n} ... \not{a}_1)$.

3.7 Izračunati $\mathrm{tr}(\not{a}_1\not{a}_2 \cdots \not{a}_6)$.

3.8 Izračunati $\mathrm{tr}[(\not{p} - m)\gamma_\mu(1-\gamma_5)(\not{q} + m)\gamma_\nu]$.

3.9 Izračunati $\gamma_\mu(1-\gamma_5)(\not{p} - m)\gamma^\mu$.

3.10 Pokazati da važi

$$\exp\,(\gamma_5\not{a}) = \cos\sqrt{a_\mu a^\mu} + \frac{1}{\sqrt{a_\mu a^\mu}}\gamma_5\not{a}\sin\sqrt{a_\mu a^\mu}\ ,$$

gde je $a^2 > 0$.

3.11 Pokazati da skup matrica

$$\Gamma^a = \{I,\ \gamma^\mu,\ \gamma^5,\ \gamma^\mu\gamma^5, \sigma^{\mu\nu}\}$$

čini skup linearno nezavisnih matrica formata 4×4. Pokazati takođe da je proizvod bilo koje dve matrice iz ovog skupa opet matrica iz ovog skupa do na $\pm 1, \pm i$.

3.12 Pokazati da se svaka matrica $A \in C^{44}$ može rastaviti po potpunom skupu $\Gamma^a = \{I,\ \gamma^\mu,\ \gamma^5,\ \gamma^\mu\gamma^5, \sigma^{\mu\nu}\}$ matrica, tj $A = \Sigma_a c_a \Gamma^a$ gde je $c_a = \frac{1}{4}\mathrm{tr}(A\Gamma_a)$.

3.13 Proizvode γ matrica rastaviti po potpunom skupu Γ^a matrica:

(i) $\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho$,

(ii) $\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu$,

(iii) $\sigma_{\mu\nu}\gamma_\rho\gamma_5$.

3.14 Antikomutator $\{\gamma^\mu, \sigma^{\nu\rho}\}$ rastaviti po potpunom skupu Γ matrica.

3.15 Izračunati $\mathrm{tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_a\gamma_\beta\gamma_5)$.

3.16 Dokazati $\gamma_5\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\sigma_{\rho\sigma}$.

3.17 Pokazati da se komutator $[\sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\rho\sigma}]$ može izraziti preko samih $\sigma_{\mu\nu}$ matrica. Odrediti koeficijente u razvoju.

3.18 Pokazati da je matrica, koja komutira sa svim gama matricama γ^μ, skalarna.

3.19 Data je unitarna 4×4, matrica $U = \exp(\beta\vec{\alpha}\vec{n})$, gde su β i $\vec{\alpha}$ Dirac-ove matrice a $\vec{n}$ jedinični vektor. Pokazati da je

$$\vec{\alpha}' \equiv U\vec{\alpha}U^\dagger = \vec{\alpha} - (\mathrm{I} - U^2)(\vec{\alpha}\vec{n})\vec{n},$$

gde je I jedinična 4×4 matrica.

3.20 Pokazati da skup matrica (3.C) čini jednu reprezentaciju γ matrica. Kako izgleda unitarna matrica koja ovu reprezentaciju povezuje sa Dirac-ovom. Kako u ovoj reprezentaciji izgledaju $\sigma_{\mu\nu}$ matrice, a kako γ_5 matrica?

Dirac-ova jednačina

- Dirac-ova jednačina,
$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \ , \tag{4.A}$$
je jednačina čestice spina 1/2. Opšte rešenje ove jednačine je
$$\psi = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sum_{r=1}^{2} \int d^3p \sqrt{\frac{m}{E_p}} \Big(u_r(\vec{p}) c_r(\vec{p}) e^{-ipx} + v_r(\vec{p}) d_r^\dagger(\vec{p}) e^{ipx} \Big) \ , \tag{4.B}$$
gde su $u_r(\vec{p})$ i $v_r(\vec{p})$ bazisni bispinori koji zadovoljavaju jednačine
$$\begin{aligned} (\not{p} - m) u_r(\vec{p}) &= 0 \ , \\ (\not{p} + m) v_r(\vec{p}) &= 0 \ , \end{aligned} \tag{4.C}$$
kao i relacije ortogonalnosti
$$\begin{aligned} \bar{u}_r(\vec{p}) u_s(\vec{p}) = -\bar{v}_r(\vec{p}) v_s(\vec{p}) &= \delta_{rs}, \\ \bar{u}_r(\vec{p}) v_s(\vec{p}) = \bar{v}_r(\vec{p}) u_s(\vec{p}) &= 0 \ . \end{aligned} \tag{4.D}$$
$c_r(\vec{p})$ i $d_r(\vec{p})$ u (4.B) su koeficijenti.

- Pri Lorentz-ovim transformacijama, $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ Dirac-ov spinor, $\psi(x)$ se transformiše kao
$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) = e^{-\frac{i}{4}\sigma^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}} \psi(x) \ . \tag{4.E}$$
$S(\Lambda)$ je matrica Lorentz-ove transformacije u spinorskoj reprezentaciji i ona zadovoljava jednačine
$$\begin{aligned} S^{-1}(\Lambda) &= \gamma_0 S^\dagger(\Lambda) \gamma_0 \ , \\ S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda) &= \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu \ . \end{aligned}$$

- Jednačina kretanja elektrona, naelektrisanja $-e$ u elektromagnetnom polju, A^μ je
$$[i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - m]\psi(x) = 0 \ . \tag{4.F}$$

- Transformacioni zakon Dirac-ovog polja pri prostornoj inverziji je
$$\psi(t,\vec{x}) \to \psi'(t,-\vec{x}) = \gamma_0\psi(t,\vec{x}) \ . \tag{4.G}$$

- Vremenska inverzija je antiunitarna operacija:
$$\psi(t,\vec{x}) \to \psi'(-t,\vec{x}) = T\psi^*(t,\vec{x}) \ . \tag{4.H}$$

  Matrica T, zadovoljava
$$T\gamma_\mu T^{-1} = \gamma^{\mu *} = \gamma_\mu^T \ . \tag{4.I}$$

  Rešenje gornjeg uslova u Dirac-ovoj reprezentaciji $\gamma-$ matrica je $T = i\gamma^1\gamma^3$. Lako se vidi da važi $T^\dagger = T^{-1} = T = -T^*$.

- Konjugacija naboja transformiše spinor $\psi(x)$ na sledeći način:
$$\psi(x) \to \psi_c(x) = C\bar{\psi}^T \ . \tag{4.J}$$

  Matrica C zadovoljava sledeće uslove
$$C\gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T, \quad -C = C^{-1} = C^T = C^\dagger \ , \tag{4.K}$$

  i u Dirac-ovoj reprezentaciji je $C = i\gamma^2\gamma^0$.

4.1 Proveriti koji od navedenih operatora komutiraju sa hamiltonijanom slobodne relativističke čestice, spina 1/2

(i) $\vec{p} = -i\nabla$,

(ii) $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$,

(iii) $\vec{L}^2$,

(iv) $\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\Sigma}$,

(v) $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$,

(vi) $\vec{J}^2$,

(vii) $\vec{\Sigma} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$,

(viii) $\vec{\Sigma} \cdot \vec{n}$.

4.2 Rešiti Dirac-ovu jednačinu za slobodnu česticu.

4.3 Odrediti energiju stanja $u(p,s)e^{-ipx}$ i $v(p,s)e^{ipx}$ Dirac-ove čestice.

4.4 Pokazati da važi

$$\Sigma_{r=1}^{2} u_r(p)\bar{u}_r(p) = \frac{\not{p}+m}{2m} \equiv \Lambda_+(p)$$

$$-\Sigma_{r=1}^{2} v_r(p)\bar{v}_r(p) = -\frac{\not{p}-m}{2m} \equiv \Lambda_-(p),$$

koristeći se rešenjem zadatka 4.2. Veličine Λ_+ i Λ_- nazivaju se projektorima na pozitivno, odnosno negativno frekventna rešenja. Indeks r prebrojava nezavisne spinske stepene slobode.

4.5 Pokazati da je $\Lambda_\pm^2 = \Lambda_\pm$, i $\Lambda_+\Lambda_- = 0$. Kako ovi projektori deluju na bazne spinore? Do rezultata doći u konkretnoj reprezentaciji spinora, kao i nezavisno od nje.

4.6 Operator spina Dirac-ove čestice definisan je u sistemu mirovanja sa $S^\mu = (0, \frac{1}{2}\vec{\Sigma})$ gde je $\vec{\Sigma} = \frac{i}{2}\vec{\gamma} \times \vec{\gamma}$. Pokazati da je:

(i) $\vec{\Sigma} = \gamma_5\gamma_0\vec{\gamma}$,

(ii) $[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk}S_k$,

(iii) $S^2 = -\frac{3}{4}$.

4.7 Pokazati da važi:

$$\vec{\Sigma}\frac{\vec{p}}{|\,\vec{p}\,|}u_r(\vec{p}) = (-1)^{r+1}u_r(\vec{p})$$

$$\vec{\Sigma}\frac{\vec{p}}{|\,\vec{p}\,|}v_r(\vec{p}) = (-1)^{r}v_r(\vec{p}).$$

Da li su spinori $u_r(\vec{p})$ i $v_r(\vec{p})$ svojstveni spinori operatora $\vec{\Sigma}\,\vec{n}$, gde je $\vec{n}$ proizvoljan ort? Isto proveriti za spinore u sistemu mirovanja.

4.8 Naći operator prelaska iz nepokretnog sistema u sistem koji se kreće duž $z-$ ose brzinom v u spinorskoj reprezentaciji. Da li je taj operator unitaran?

4.9 Rešiti prethodni zadatak pri prelasku u sistem koji je zarotiran za ugao θ oko $z-$ose. Da li je taj operator unitaran?

4.10 Vektor Pauli-Lubanski-og definisan je sa $W_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}M^{\nu\rho}P^\sigma$, gde je $M^{\nu\rho} = \frac{1}{2}\sigma^{\nu\rho} + i(x^\nu\partial^\rho - x^\rho\partial^\nu)$ angularni moment, a P^μ impuls. Pokazati da važi

$$W^2\psi(x) = -\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2})m^2\psi(x),$$

gde je $\psi(x)$ rešenje slobodne Dirac-ove jednačine.

4.11 Kovarijantni operator projekcije spina na proizvoljan pravac s je $W_\mu s^\mu$ gde je $s^2 = -1$ i $s \cdot p = 0$. Pokazati da je

$$\frac{W_\mu s^\mu}{m} = \frac{1}{2m}\gamma_5 \not{s}\not{p}\ .$$

4.12 Pored spinorskog bazisa često se koristi i tzv. helicitetni bazis. Do spinora u ovom bazisu dolazi se uzimanjem $\vec{n} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$ za pravac orta $\vec{n}$. Kako u ovom slučaju izgleda kovarijantna jednačina za spin?

4.13 Kakav oblik imaju jednačine za spin iz zadatka 4.12 u ultrarelativističkom limesu?

4.14 Pokazati da operator $\gamma_5\not{s}$ komutira sa operatorom $\not{p}$ i da su mu svojstvene vrednosti ± 1. Kako izgledaju svojstveni projektori operatora $\gamma_5\not{s}$? Pokazati da oni komutiraju sa projektorima na pozitivno odnosno negativno frekventna rešenja Dirac-ove jednačine.

4.15 Dirac-ova čestica kreće se duž z-ose sa impulsom $\vec{p}$. Nerelativistička spinska talasna funkcija data je sa

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{|a|^2 + |b|^2}}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Odrediti očekivanu vrednost operatora projekcije spina $\vec{\Sigma}$ na pravac jediničnog vektora $\vec{n}$, tj. $\langle\vec{\Sigma}\cdot\vec{n}\rangle$. Naći nerelativistički limes.

4.16 Naći Dirac-ov spinor za elektron koji se kreće duž z-ose sa impulsom $\vec{p}$, a polarisan je duž pravca $\vec{n} = (\theta, \phi = \frac{\pi}{2})$ koji pripada yz ravni. Naći očekivanu vrednost operatora projekcije spina na pravac polarizacije u tom stanju.

4.17 Pod kojim uslovom je operator γ_5 konstanta kretanja za slobodnu Dirac-ovu česticu? Naći njegove svojstvene vrednosti i svojstvene projektore.

4.18 Neka je

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi$$

$$\psi_R = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi,$$

gde je ψ Dirac-ov spinor. Izvesti jednačine kretanja za ova polja. Pokazati da su one dekuplovane u slučaju čestice nulte mase. (Ova polja nazivaju se Weyl-ova polja.)

4.19 Razmotrimo sistem povezanih dvokomponentnih jednačina

$$i\sigma^\mu \frac{\partial \psi_R(x)}{\partial x^\mu} = m\psi_L(x) \ ,$$

$$i\bar{\sigma}^\mu \frac{\partial \psi_L(x)}{\partial x^\mu} = m\psi_R(x),$$

gde je $\sigma^\mu = (1, \vec{\sigma})$; $\bar{\sigma}^\mu = (1, \ -\vec{\sigma})$, a $\vec{\sigma}$ su Pauli-jeve matrice.

(i) Da li se ovaj sistem jednačina može napisati kao Dirac-ova jednačina? Ako može, naći unitarnu matricu koja povezuje novi skup γ matrica sa standardnim Dirac-ovim matricama.

(ii) Pokazati relativističku kovarijantnost datog sistema jednačina. Naći 2×2 matrice $S_R,\ S_L$ takve da je $\psi'_{R,L}(x') = S_{R,L}\psi_{R,L}(x)$ nova talasna funkcija u novom koordinatnom sistemu povezana sa starom pomoću busta duž $x-$ ose.

4.20 Pokazati da operator $K = \beta(\vec{\Sigma}\vec{l} + 1)$, gde je $\vec{\Sigma} = \frac{1}{2i}\vec{\alpha} \times \vec{\alpha}$ operator spina a $\vec{l}$ orbitalni moment, komutira sa hamiltonijanom slobodne relativističke čestice spina 1/2.

4.21 Dokazati (Gordon-ova dekompozicija struje)

$$2m\bar{u}(\vec{p}_1)\gamma_\mu u(\vec{p}_2) = \bar{u}(\vec{p}_1)[(p_1 + p_2)_\mu + i\sigma_{\mu\nu}(p_1 - p_2)^\nu]u(\vec{p}_2) \ ,$$

ne pozivajući se na konkretnu reprezentaciju Dirac-ovih spinora.

4.22 Ne pozivajući se na konkretnu reprezentaciju Dirac-ovih spinora pokazati

$$\bar{u}(\vec{p}')\sigma_{\mu\nu}(p + p')^\nu u(\vec{p}) = i\bar{u}(\vec{p}')(p' - p)_\mu u(\vec{p}).$$

4.23 Data je struja $J_\mu = \bar{u}(\vec{p}_2)\not{p}_1\gamma_\mu\not{p}_2 u(\vec{p}_1)$, gde su $u(\vec{p})$ i $\bar{u}(\vec{p})$ Dirac-ovi spinori. Pokazati da je J_μ oblika

$$J_\mu = \bar{u}(\vec{p}_2)[F_1(m, q^2)\gamma_\mu + F_2(m, q^2)\sigma_{\mu\nu}q^\nu]u(\vec{p}_1),$$

gde je $q = p_2 - p_1$. Odrediti funkcije F_1 i F_2.

4.24 Ne pozivajući se na konkretnu reprezentaciju Dirac-ovih spinora, naći

$$\bar{u}(\vec{p})\frac{1}{2}(1 - \gamma_5)u(\vec{p})$$

kao funkciju normalizacije $N = u^\dagger(\vec{p})u(\vec{p})$.

4.25 Data je struja

$$J_\mu = \bar{u}(\vec{p}_2)p^\rho q^\lambda \sigma_{\mu\rho}\gamma_\lambda u(\vec{p}_1),$$

gde su $u(\vec{p}_1)$ i $u(\vec{p}_2)$ Dirac-ovi spinori za slobodnu česticu mase m i impulsa p_1 odnosno p_2 i gde je $p = p_1 + p_2$ i $q = p_2 - p_1$. Pokazati da je struja J_μ oblika

$$J_\mu = \bar{u}(\vec{p}_2)(F_1\gamma_\mu + F_2 q_\mu + F_3\sigma_{\mu\rho}q^\rho)u(\vec{p}_1),$$

gde funkcije $F_i = F_i(q^2, m)$, $(i = 1, 2, 3)$ treba odrediti.

4.26 Pokazati da ako je $\psi(x)$ rešenje Dirac-ove jednačine za slobodnu česticu, da je ono rešenje i Klein-Gordon-ove jednačine.

4.27 Odrediti gustinu verovatnoće $\rho = \bar{\psi}\gamma^0\psi$ i gustinu struje $\vec{j} = \bar{\psi}\vec{\gamma}\psi$, za elektron koji se kreće sa impulsom $\vec{p}$ u proizvoljnom spinskom stanju. Proveriti da oni zadovoljavaju jednačinu kontinuiteta $\partial_\mu j^\mu = 0$.

4.28 Ako je $\psi(x)$ opšte rešenje Dirac-ove jednačine izračunati:

(i) naelektrisanje $Q = -e\int d^3x\psi^+\psi$

(ii) energiju $H = \int d^3x[\bar{\psi}(-i\gamma^i\partial_i + m)\psi]$

(iii) impuls $\vec{P} = -i\int d^3x\psi^+\nabla\psi$.

4.29 Naći vremensku zavisnost operatora položaja $\vec{r}$ slobodne relativističke čestice spina 1/2.

4.30 U trenutku $t = 0$ stanje slobodnog elektrona opisano je bispinorom

$$\psi(t = 0, \vec{x}) = \delta^{(3)}(\vec{x})\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Naći $\psi(t, \vec{x})$.

4.31 Odrediti vremensku evoluciju talasnog paketa

$$\psi(t = 0,\ \vec{x}) = \frac{1}{(\pi d^2)^{\frac{3}{4}}}\exp\Big(-\frac{\vec{x}^2}{2d^2}\Big)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

za slobodnu Dirac-ovu jednačinu.

4.32 Elektron sa impulsom $\vec{p} = p\vec{e}_z$ i helicitetom 1/2 nailazi na barijeru

$$-eA^0 = \begin{cases}0, & z < 0\\ V, & z > 0\end{cases}.$$

Odrediti koeficijente transmisije i refleksije.

4.33 Elektron sa impulsom $\vec{p} = p\vec{e}_z$ i helicitetom 1/2 nailazi na barijeru

$$-eA^0 = \begin{cases} 0, & z < 0, z > a \\ V_0, & 0 < z < a \end{cases} .$$

Odrediti koeficijent transmisije za prolazak elektrona kroz barijeru.

4.34 Naći energetski spektar parnih i neparnih rešenja elektrona koji se nalazi u potencijalnoj jami širine $2a$ i dubine V_0. Uzeti da energija zadovoljava uslov $(E + V_0)^2 - m^2 > 0$.

4.35 Naći energetski spektar Dirac-ove čestice u spoljnjem konstantnom magnetnom polju $\vec{B} = B\vec{e}_z$.

4.36 Pokazati da ako $\psi(x)$ zadovoljava Dirac-ovu jednačinu u elektromagnetnom polju, onda ono zadovoljava i generalisanu Klein-Gordon-ovu jednačinu

$$[(\partial_\mu - ieA_\mu)(\partial^\mu - ieA^\mu) - \frac{e}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + m^2]\psi(x) = 0,$$

gde je $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ tenzor jačine polja.

4.37 Naći nerelativistički limes Dirac-ovog hamiltonijana $H = \vec{\alpha}(\vec{p} + e\vec{A}) - eA^0 + m\beta$ uračunavajući članove reda $\frac{v^2}{c^2}$.

4.38 Dato je vektorsko polje $V_\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)$. Pokazati da je V_μ realna veličina i ispitati kako se ona transformiše pri pravim ortohronim Lorentz-ovim transformacijama, konjugaciji naboja C, prostornoj inverziji P i vremenskoj inverziji T.

4.39 Data je bilinearna kovarijantna veličina $A^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x)$. Ispitati kako se ona transformiše pri pravim ortohronim Lorentz-ovim transformacijama kao i pri diskretnim transformacijama C, P, T kao i kombinovanoj CPT transformaciji.

4.40 Dato je tenzorsko polje $T_{\mu\nu}(x) = \bar{\psi}(x)\sigma_{\mu\nu}\psi(x)$. Pokazati da je $T_{\mu\nu}$ realna veličina i ispitati kako se ona transformiše pri pravim ortohronim Lorentz-ovim transformacijama. Takođe ispitati njegova transformaciona svojstva u odnosu na diskretne transformacije C, P, T kao i kombinovanu CPT transformaciju.

4.41 Pokazati da je veličina $\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\partial^\mu\psi(x)$ Lorentz-ov skalar. Kako se ona transformiše pri diskretnim transformacijama?

4.42 Koristeći se Dirac-ovom jednačinom, pokazati da je $C\bar{u}^T(p, s) = v(p, s)$ gde je C operacija konjugacije naboja a $u(p, s)$ i $v(p, s)$ Dirac-ovi spinori. Proveriti i u konkretnoj reprezentaciji.

4.43 Matrica C definisana je sa

$$C\gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T.$$

Pokazati da ako matrice C_1 i C_2 zadovoljavaju gornju jednačinu, onda je $C_1 = kC_2$, gde je k konstanta.

4.44 Ako je

$$\psi(x) = N_p \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\sigma_3 p}{E_p+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{-ipx}$$

talasna funkcija relativističke čestice spina $\frac{1}{2}$, naći:

(i) Talasnu funkciju $\psi_c(x) = C\bar{\psi}^T(x)$ antičestice,

(ii) Talasnu funkciju za posmatrača koji se kreće impulsom $\vec{p} = p\vec{e}_z$,

(iii) Talasnu funkciju koja se dobija iz zadate prostornom i vremenskom inverzijom.

4.45 Kako operatori C i P izgledaju u Weyl-ovoj reprezentaciji?

4.46 Pokazati da helicitet Dirac-ove čestice menja znak pri prostornoj inverziji, a ne menja pri vremenskoj inverziji.

4.47 Dirac-ov hamiltonijan je $H = \vec{\alpha}\vec{p} + \beta m$. Odrediti parametar θ tako da transformisani hamiltonijan $H' = UHU^+$, gde je U operator dat sa $U = e^{\beta\vec{\alpha}\vec{p}\theta}$, ima "neparan" oblik (Foldy-Wouthuysen-ova transformacija).

4.48 Pokazati da u Foldy-Wouthuysen-ovoj reprezentaciji operatori spina i orbitalnog angularnog momenta imaju oblik:

$$\vec{\Sigma}_{FW} = \frac{m}{E_p}\vec{\Sigma} + \frac{\vec{p}\,(\vec{p}\,\vec{\Sigma})}{2E_p(m+E_p)} + \frac{i\beta(\vec{\alpha}\times\vec{p})}{2E_p}$$

odnosno

$$\vec{l}_{FW} = \vec{l} - \frac{\vec{p}\,(\vec{p}\,\vec{\Sigma})}{2E_p(m+E_p)} + \frac{\vec{p}^2\,\vec{\Sigma}}{2E_p(m+E_p)} - \frac{i\beta(\vec{\alpha}\times\vec{p})}{2E_p}.$$

4.49 Naći Foldy-Wouthuysen-ovu transformaciju operatora koordinate $\vec{x}$ i impulsa $\vec{p}$. Čemu je jednak komutator $[\vec{x}_{FW},\ \vec{p}_{FW}]$?

Zadaci 5

Klasična polja i simetrije

- Ako je $f(x)$ funkcija a $F[f(x)]$ funkcional tada je funkcionalni izvod, $\frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(y)}$ definisan sa

$$\delta F = \int dy \frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(y)} \delta f(y) \ , \tag{5.A}$$

gde je δF varijacija funkcionala.

- Dejstvo ima oblik

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_r, \partial_\mu \phi_r) \ , \tag{5.B}$$

gde je $\mathcal{L}$ gustina lagranžijana[1], koja je funkcija polja, $\phi_r(x), \ r = 1, .., n$ i izvoda polja. Uslov da dejstvo (5.B) bude stacionarno (Hamilton-ov princip) daje nam Euler-Lagrange-ove jednačine kretanja:

$$\partial_\mu \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \Big) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} = 0 \ . \tag{5.C}$$

- Konjugovani impuls $\pi_r(x)$ je

$$\pi_r(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_r} \ . \tag{5.D}$$

Kanonski hamiltonijan je

$$H = \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x (\dot{\phi}_r \pi_r - \mathcal{L}) \ . \tag{5.E}$$

[1] U teoriji polja gustina lagranžijana se često jednostavnije naziva lagranžijanom, što ćemo i mi praktikovati u ovoj zbirci. Lagranžijan je $L = \int d^3x \mathcal{L}$.

- Noether-ina teorema: Ako je dejstvo invarijantno na kontinualne infinitezimalne transformacije:
$$x_\mu \to x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu \ ,$$
$$\phi_r(x) \to \phi'_r(x') = \phi_r(x) + \delta\phi_r(x) \ ,$$
tada je divergencija struje
$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)}\delta\phi_r(x) - T^{\mu\nu}\delta x_\nu \qquad (5.F)$$
jednaka nuli tj. $\partial_\mu j^\mu = 0$. Veličina
$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi_r)}\partial_\nu\phi - \mathcal{L}g_{\mu\nu} \ , \qquad (5.G)$$
je tenzor energije impulsa. Veličine $Q^a = \int d^3x j_0^a(x)$ su konstante kretanja. Indeks a potiče od grupe simetrije.

5.1 Za date funkcionale

(i) $F_\mu = \partial_\mu\phi$,

(ii) $S = \int d^4x\Big[\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - V(\phi)\Big]$,

odrediti funkcionalne izvode $\frac{\delta F_\mu}{\delta\phi}$ odnosno $\frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)}$.

5.2 Naći Euler-Lagrange-eve jednačine kretanja ako su lagranžijani dati sa

(i) $\mathcal{L} = -(\partial_\mu A^\nu)(\partial_\nu A^\mu) + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu + \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2$,

(ii) $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu$, gde je $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$,

(iii) $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{4}\lambda\phi^4$,

(iv) $\mathcal{L} = (\partial_\mu\phi - ieA_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^* + ieA^\mu\phi^*) - m^2\phi^*\phi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$,

(v) $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 - ig\bar{\psi}\gamma_5\psi\phi$.

5.3 Pokazati da je lagranžijan $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_r, \partial\phi_r)$, gde indeks r prebrojava nezavisna polja, određen do na divergenciju proizvoljne funkcije polja ϕ_r.

5.4 Pokazati da se za lagranžijan slobodnog skalarnog polja može uzeti $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\phi(\Box + m^2)\phi$.

5.5 Pokazati da se za lagranžijan spinorskog polja može uzeti $\mathcal{L} = \frac{i}{2}(\bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi - (\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi) - m\bar{\psi}\psi$.

5.6 Gustina lagranžijana masenog vektorskog polja A^μ je

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu .$$

Pokazati da je jednačina $\partial_\mu A^\mu = 0$ posledica jednačina kretanja.

5.7 Pokazati da je lagranžijan bezmasenog vektorskog polja invarijantan na gradijentne transformacije $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\Lambda(x)$, gde je $\Lambda = \Lambda(x)$ proizvoljna funkcija. Da li je u ovom slučaju jednačina $\partial_\mu A^\mu = 0$ posledica jednačina kretanja?

5.8 Odrediti hamiltonijan za skalarno i spinorsko polje.

5.9 Pokazati da je lagranžijan

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[(\partial\phi_1)^2 + (\partial\phi_2)^2] - \frac{m^2}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2$$

invarijantan na transformacije

$$\phi_1 \to \phi_1' = \phi_1\cos\theta - \phi_2\sin\theta$$
$$\phi_2 \to \phi_2' = \phi_1\sin\theta + \phi_2\cos\theta$$

i odrediti Noether-inu struju i naboje.

5.10 Dat je lagranžijan

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\phi^\dagger)(\partial^\mu\phi) - m^2\phi^\dagger\phi ,$$

gde je $\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}$ dublet grupe SU(2). Pokazati da je ovaj lagranžijan SU(2) invarijantan i odrediti Noether-inu struju i naboje.

5.11 Dat je lagranžijan

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\psi ,$$

gde je $\psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$ dublet grupe SU(2). Pokazati da $\mathcal{L}$ ima SU(2) simetriju i odrediti Noether-inu struju i naboje. Naći jednačine kretanja za spinorska polja ψ_i gde je $i = 1, 2$.

5.12 Pokazati da su lagranžijani

(i) $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi$,

(ii) $\mathcal{L} = (\partial_\mu\phi^\dagger)(\partial^\mu\phi) - m^2\phi^\dagger\phi$,

fazno invarijantni i odrediti Noether-inu struju.

5.13 Dat je lagranžijan realnog trokomponetnog skalarnog polja

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi^T \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2}\phi^T \phi,$$

gde je $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}$. Naći jednačine kretanja za skalarna polja ϕ_i. Pokazati da je ovaj lagranžijan SO(3) invarijantan i odrediti Noether-inu struju.

5.14 Ispitati invarijantnost Dirac-ovog lagranžijana na kiralne transformacije

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{i\alpha\gamma_5}\psi(x).$$

Odrediti Noether-inu struju i njenu četvorodivergenciju.

5.15 Zadat je lagranžijan tzv. σ-modela

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \ &= \frac{1}{2}[(\partial_\mu \sigma)(\partial^\mu \sigma) + (\partial_\mu \vec{\pi})(\partial^\mu \vec{\pi})] + i\bar{N}\not{\partial}N \\ &+ g\bar{N}(\sigma + i\vec{\tau}\vec{\pi}\gamma_5)N - \frac{m^2}{2}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) + \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)^2\end{aligned}$$

gde je σ skalarno polje, $\vec{\pi}$ trokomponetno skalarno polje, $N = (p\ n)^T$ dublet spinorskih polja, a $\vec{\tau}$ Pauli-jeve matrice. Pokazati da je lagranžijan $\mathcal{L}$ invarijantan na transformacije:

$$\begin{aligned}&\sigma(x) \to \sigma(x)\ , \\ &\vec{\pi}(x) \to \vec{\pi}(x) + \vec{\alpha} \times \vec{\pi}(x)\ , \\ &N(x) \to N(x) - i\frac{\vec{\alpha}\vec{\tau}}{2}N(x)\ ,\end{aligned}$$

gde je $\vec{\alpha}$ infinitezimalni parametar. Odrediti očuvane struje.

5.16 Naći tenzor energije impulsa (očuvana struja pri translacijama) i angularnog momenta (očuvana struja pri Lorentz-ovim rotacijama) za skalarno polje, Dirac-ovo polje i elektromagnetno polje.

5.17 Pri dilatacijama koordinate se transformišu po $x \to x' = e^{-\rho}x$, a skalarno polje $\phi(x) \to \phi'(x') = e^{\rho}\phi(x)$, gde je ρ parametar. Naći infinitezimalnu varijaciju forme skalarnog polja. Da li je dejstvo za skalarno polje invarijantno na ovu transformaciju? Naći Noether-inu struju.

5.18 Pokazati da je dejstvo bezmasenog Dirac-ovog polja invarijantano na dilatacije $x \to x' = e^{-\rho}x$, $\psi(x) \to \psi'(x') = e^{\frac{3}{2}\rho}\psi(x)$. Naći Noether-inu struju i naboj.

ZADACI 6

Green-ove funkcije

- Green-ove funkcije $\Delta(x-y)$ za Klein-Gordon-ovu jednačinu zadovoljavaju jednačinu
$$(\Box_x + m^2)\Delta(x-y) = -\delta^{(4)}(x-y) \ . \tag{6.A}$$
Razni tipovi Green-ovih funkcija zadovoljavaju različite granične uslove.

- Green-ove funkcije $S(x-y)$ za Dirac-ovu jednačinu zadovoljavju jednačinu
$$(i\gamma^\mu \partial^x_\mu - m)S(x-y) = \delta^{(4)}(x-y) \ , \tag{6.B}$$
naravno, opet uz odgovarajuće granične uslove.

6.1 Odrediti Green-ove funkcije za Klein-Gordon-ovu jednačinu.

6.2 Ako je Δ_F Feynman-ov propagator, a Δ_R retardovana Green-ova funkcija za Klein-Gordon-ovu jednačinu, pokazati da je njihova razlika $\Delta_F - \Delta_R$ rešenje homogene Klein-Gordon-ove jednačine.

6.3 Pokazati da je
$$\int d^4k \delta(k^2 - m^2)\theta(k_0)f(k) = \int \frac{d^3k}{2\omega_k} f(k),$$
gde je $\omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$

6.4 Pokazati da je

$$\Delta_R(-x) = \Delta_A(x)$$
$$\Delta_F(-x) = \Delta_F(x).$$

6.5 Definišimo Green-ovu funkciju, $\bar{\Delta}(x)$ za Klein-Gordon-ovu jednačinu sa

$$\bar{\Delta}(x) = \text{v.p.} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2}$$

Pokazati da je $\bar{\Delta}(x) = \frac{1}{2}(\Delta_R(x) + \Delta_A(x))$, kao i da je $\bar{\Delta}(-x) = \bar{\Delta}(x)$.

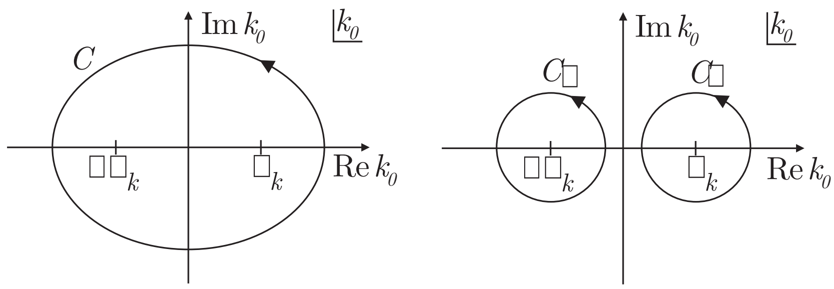
6.6 Naći

$$\Delta(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \oint_C d^4k \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2}$$

i

$$\Delta_\pm(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \oint_{C\pm} d^4k \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2}$$

Konture integracije zadate su na slici.



Pokazati da je $\Delta(x) = \Delta_+(x) + \Delta_-(x)$.

6.7 Pokazati da je

$$\left.\frac{\partial \Delta(x)}{\partial x^i}\right|_{x^0=0} = 0 \ ,$$
$$\left.\frac{\partial \Delta(x)}{\partial x^0}\right|_{x^0=0} = -\delta^{(3)}(\vec{x}) \ .$$

6.8 Pokazati da je $\Delta(x)$ rešenje homogene Klein-Gordon-ove jednačine.

6.9 Pokazati da je

$$\Delta_F(x)\Big|_{m=0} = -\frac{1}{4\pi}\delta(x^2) + \frac{i}{4\pi^2}\text{v.p.}\frac{1}{x^2},$$

gde je Δ_F Feynman-ov propagator za Klein-Gordon-ovu jednačinu.

6.10 Pokazati da je

$$\Delta_{R,A}\Big|_{m^2=0} = -\frac{1}{2\pi}\theta(\pm t)\delta(x^2)$$

za Klein-Gordon-ovu jednačinu.

6.11 Ako je $\rho(y) = g\delta^{(3)}(\vec{y})$, pokazati da je

$$\phi_R = \frac{g}{4\pi}\frac{\exp(-m \mid \vec{x} \mid)}{\mid \vec{x} \mid},$$

gde je $\phi_R(x) = -\int \Delta_R(x-y)\rho(y)dy$.

6.12 Pokazati da je Green-ova funkcija $S(x)$ za Dirac-ovu jednačinu data sa

$$S(x) = (i\partial\!\!\!/ + m)\Delta(x),$$

gde je $\Delta(x)$ Green-ova funkcija za Klein-Gordon-ovu jednačinu.

6.13 Polazeći od Dirac-ove jednačine odrediti retardovanu, advansiranu, Dayson-ovu Green-ovu funkciju kao i Feynman-ov propagator, za slobodnu relativističku česticu spina 1/2. Pokazati da razlika bilo koje dve od njih predstavlja rešenje homogene Dirac-ove jednačine.

6.14 Ako je $j(y) = g\delta(y_0)e^{i\vec{q}\vec{y}}(1,0,0,0)^T$ izračunati

$$\psi(x) = \int S_F(x-y)j(y)d^4y\ ,$$

gde je S_F Feynman-ov propagator za Dirac-ovo polje. Ovde je g konstanta, a $\vec{q}$ je konstantan vektor.

6.15 Odrediti Green-ovu funkciju za maseno vektorsko polje, opisano lagranžijanom

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu,$$

gde je $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

6.16 Odrediti Green-ovu funkciju za bezmaseno vektorsko polje sa članom koji fiksira kalibraciju. U ovom slučaju lagranžijan polja ima oblik

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\lambda(\partial A)^2,$$

gde je $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ a λ je konstanta.

Kanonsko kvantovanje skalarnog polja

- Operatori kompleksnog skalarnog polja su

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}} (a(\vec{k})e^{-ikx} + b^\dagger(\vec{k})e^{ikx}) \ , \tag{7.A}$$

$$\phi^\dagger(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}} (b^\dagger(\vec{k})e^{-ikx} + a(\vec{k})e^{ikx}) \ , \tag{7.B}$$

gde su $a(\vec{k})$ i $b(\vec{k})$ anihilacioni a $a^\dagger(\vec{k})$ i $b^\dagger(\vec{k})$ kreacioni opertori. U slučaju realnog skalarnog polja je $a(\vec{k}) = b(\vec{k})$. Realno polje opisuje neutralne, dok kompleksno polje opisuje naelektrisane čestice.

- Konjugovani impulsi su

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}^\dagger, \quad \pi^\dagger = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^\dagger} = \dot{\phi} \ .$$

Kanonske komutacione relacije imaju oblik

$$[\phi(\vec{x},t), \pi(\vec{y},t)] = [\phi^\dagger(\vec{x},t), \pi^\dagger(\vec{y},t)] = i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) \ , \tag{7.C}$$

dok su ostali komutatori jednaki nuli. Komutacione relacije između kreacionih i anihilacionih operatora su:

$$[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{q})] = [b(\vec{k}), b^\dagger(\vec{q})] = \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{q})$$

$$[a(\vec{k}), a(\vec{q})] = [a^\dagger(\vec{k}), a^\dagger(\vec{q})] = [a(\vec{k}), b^\dagger(\vec{q})] = [a^\dagger(\vec{k}), b^\dagger(\vec{q})] = 0 \ ,$$

$$[b(\vec{k}), b(\vec{q})] = [b^\dagger(\vec{k}), b^\dagger(\vec{q})] = [a(\vec{k}), b(\vec{q})] = [a^\dagger(\vec{k}), b(\vec{q})] = 0 \ . \tag{7.D}$$

- Vakuum $|0\rangle$ je definisan sa $a(\vec{k})\,|0\rangle = 0$, $\quad b(\vec{k})\,|0\rangle = 0$ za svako $\vec{k}$. Stanje $a^{\dagger}(\vec{k})\,|0\rangle$ odgovara skalarnoj čestici impulsa $\vec{k}$ dok je $b^{\dagger}(\vec{k})\,|0\rangle$ antičestica impulsa $\vec{k}$. Višečestična stanja se dobijaju delovanjem kreacionih operatora na vakuum.

- Normalno uređenje proizvoda kreacionih i anihilacionih operatora u oznaci : :, definisano je tako da kreacione operatore u proizvodu premešta levo od anihilacionih. Npr.
$$: a_1 a_2 a_3^{\dagger} a_4 a_5^{\dagger} := a_3^{\dagger} a_5^{\dagger} a_1 a_2 a_4 \ .$$

- Hamiltonijan, impuls i angularni moment skalarnog polja definisani su u zadaku 5.16.

- Feynman-ov propagator realnog skalarnog polja je
$$i\Delta_F(x-y) = \langle 0|\, T(\phi(x)\phi(y))\,|0\rangle \ . \tag{7.E}$$

- Transformacioni zakon skalarnog polja pri Poincare-ovim transformacijama dat je u zadatku 19 dok su transformacioni zakoni pri diskretnim transformacijama definisani u zadacima 7.20, 7.21 odnosno 7.22.

7.1 Polazeći od kanonskih komutacionih relacija realnog skalarnog polja
$$[\phi(\vec{x},t), \dot{\phi}(\vec{y},t)] = i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})$$
$$[\phi(\vec{x},t), \phi(\vec{y},t)] = [\dot{\phi}(\vec{x},t), \dot{\phi}(\vec{y},t)] = 0 \ ,$$
pokazati komutacione relacije između kreacionih i anihilacionih operatora
$$[a(\vec{k}), a^{\dagger}(\vec{q})] = \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{q}) \ ,$$
$$[a(\vec{k}), a(\vec{q})] = [a^{\dagger}(\vec{k}), a^{\dagger}(\vec{q})] = 0 \ .$$

7.2 Ako je $\phi(t=0,\vec{x}) = 0$, $\dot{\phi}(t=0,\vec{x}) = c$, gde je c konstanta naći skalarno polje $\phi(t,\vec{x})$ u svakom trenutku.

7.3 Za kompleksno skalarno polje izračunati operatore energije : H :; impulsa : $\vec{P}$: i naelektrisanja : Q :. Rezultat uporediti sa rezultatima zadatka 2.2, 2.3 i 2.4.

7.4 Pokazati da su mode

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3\omega_k}} e^{-i\omega_k t + i\vec{k}\vec{x}}$$

ortonormalne u odnosu na skalarni proizvod

$$(f,g) = -i \int d^3x [f(x)\partial_t g^*(x) - g^*(x)\partial_t f(x)].$$

7.5 Pokazati da je vakuumska očekivana vrednost (VOV) energije skalarnog polja

$$\langle 0| H |0\rangle = -\frac{1}{4}\pi m^4 \delta^{(3)}(0)\Gamma(-2).$$

Kao što se vidi ovaj izraz je proizvod dva divergentna člana.

7.6 Izračunati sledeće komutatore (uzeti da je skalarno polje realno sem u slučaju (iv))

(i) $[P^\mu, \phi(x)]$,

(ii) $[P^\mu, F(\phi(x), \pi(x))]$, gde je F diferencijabilna funkcija polja i impulsa,

(iii) $[H, a^\dagger(\vec{k})a(\vec{q})]$,

(iv) $[Q, P^\mu]$,

(v) $[N, H]$, gde je $N = \int d^3k a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k})$ operator broja čestica,

(vi) $\int d^3x [H, \phi(x)] e^{-i\vec{p}\vec{x}}$,

(vii) $\langle 0| e^{-A} H e^{A} |0\rangle$, gde je $A = \int d^3k [f(\vec{k})a(\vec{k}) - f^*(\vec{k})a^\dagger(\vec{k})]$.

7.7 Pokazati $e^{iQ}\phi(x)e^{-iQ} = e^{-iq}\phi(x)$.

7.8 Operator momenta impulsa $M_{\mu\nu}$ skalarnog polja izračunat je u zadatku 5.16, samo što je sada klasično polje zamenjeno operatorom skalarnog polja. Pokazati da važi :

(i) $[M_{\mu\nu}, \phi(x)] = -i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)\phi(x)$,

(ii) $[M_{\mu\nu}, P_\lambda] = i(g_{\lambda\nu}P_\mu - g_{\lambda\mu}P_\nu)$,

(iii) $[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho})$.

7.9 Pokazati da $\phi_k = \left\langle \vec{k} \middle| \phi(x) \middle| 0 \right\rangle$ zadovoljava Klein-Gordon-ovu jednačinu.

7.10 Izračunati naboje $Q^a = \int d^3x j_0^a(x)$, gde je j_0^a nulta komponenta Noether-ine struje za simetrije iz zadataka 5.10 i 5.13. Pokazati da naboji u oba slučaja zadovoljavaju komutacione relacije su(2) algebre

$$[Q^a,\ Q^b] = i\epsilon^{abc}Q^c.$$

7.11 U zadatku 5.17 pokazali smo da je dejstvo za bezmaseno skalarno polje dilataciono invarijantno.

(i) Odrediti očuvani naboj pri dilatacijama $D = \int d^3xj^0$.

(ii) Pokazati da važi $\rho[D, \phi(x)] = -i\delta_0\phi(x)$ i $\rho[D, \pi(x)] = -i\delta_0\pi(x)$.

(iii) Naći $[D, F(\phi, \pi)]$, gde je F proizvoljna analitička funkcija.

(iv) Pokazati da je $[D, P^\mu] = -iP^\mu$.

7.12 Neka se operator F transformiše po zakonu

$$\delta_\epsilon F = \epsilon^a[F,\ T^a],$$

u odnosu na grupu simetrije čiji su parametri ϵ^a, a generatori T^a. Generatori zadovoljavaju relaciju

$$[T^a,\ T^b] = if^{abc}T^c.$$

Pokazati da je

$$[\delta_\eta,\ \delta_\chi]F = \delta_\epsilon F,$$

gde je $\epsilon^c = if^{abc}\eta^a\chi^b$.

7.13 Ako se umesto polja $\phi(x)$ uvede polje

$$\phi_f(x) = \int d^3x\phi(t, \vec{x})f(\vec{x}) \ ,$$

gde je funkcija f data sa

$$f(\vec{x}) = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}\alpha\vec{x}^2} \ ,$$

izračunati $\langle 0|\, \phi_f(t, \vec{x})\phi_f(t, \vec{y})\, |0\rangle$. Šta se dobija u limesu $m \to 0$?

7.14 Operatori kreacije α^μ_m $(0 < m \in Z)$ i anihilacije α^μ_m $(0 > m \in Z)$ slobodne bozonske strune zadovoljavaju komutacione relacije

$$[\alpha^\mu_m,\ \alpha^\nu_n] = -m\delta_{m+n,0}g^{\mu\nu} \ .$$

Ako definišemo operatore $L_m = -\frac{1}{2}\sum \alpha^\mu_{m-n}\alpha_{n\mu}$ pokazati da važi

$$[L_m,\ L_n] = (m-n)L_{m+n}.$$

Operatori L_m čine Virazoro-vu algebru (strogo govoreći ova algebra se dobija tek posle odgovarajućeg normalnog uređenja operatora čime se u predthodnom izrazu pojavljuje još jedan, tzv. centralni član).

7.15 Za bezmaseno skalarno polje izračunati vakuumsku očekivanu vrednost

$$\langle 0| \{\phi(x), \phi(y)\} |0\rangle ,$$

gde je { , } antikomutator. Pokazati da dobijena VOV zadovoljava Klein Gordon-ovu jednačinu.

7.16 Za slobodno skalarno polje izračunati VOV

$$\langle 0| \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4) |0\rangle .$$

7.17 Naći VOV

$$\langle 0| \phi(x)\phi(y) |0\rangle$$

u dve $(1+1)$ dimenzije za bezmaseno skalarno polje.

7.18 Pokazati da važi

$$(\Box_x + m^2) \langle 0| T(\phi(x)\phi(y)) |0\rangle = -i\delta^{(4)}(x-y),$$

tj. da je $\langle 0| T(\phi(x)\phi(y)) |0\rangle$ Feynman-ov propagator za skalarno polje.

7.19 Pri Poincare-ovim transformacijama $x \to x' = \Lambda x + a$ realno skalarno polje transformiše se po zakonu

$$U(\Lambda, a)\phi(x)U^{-1}(\Lambda, a) = \phi(\Lambda x + a),$$

gde je $U(\Lambda, a)$ reprezentacija Poincare-ove grupe u prostoru polja.

(i) Pokazati da se kreacioni i anihilacioni operatori transformišu na sledeći način:

$$U(\Lambda, a)a(\vec{k})U^{-1}(\Lambda, a) = \sqrt{\frac{\omega_{k'}}{\omega_k}}\exp(-i\Lambda^{\mu}{}_{\nu}k^{\nu}a_{\mu})a(\Lambda k) ,$$

$$U(\Lambda, a)a^{\dagger}(\vec{k})U^{-1}(\Lambda, a) = \sqrt{\frac{\omega_{k'}}{\omega_k}}\exp(i\Lambda^{\mu}{}_{\nu}k^{\nu}a_{\mu})a^{\dagger}(\Lambda k) .$$

(ii) Pokazati da se n-čestično stanje $|k_1, \ldots, k_n\rangle$ transformiše po zakonu

$$U(\Lambda, a) |k_1,\ k_2, \ldots, k_n\rangle = \sqrt{\frac{\omega_{k'_1} \cdots \omega_{k'_n}}{\omega_{k_1} \cdots \omega_{k_n}}} e^{ia_{\mu}\Lambda^{\mu}{}_{\nu}(k_1^{\nu}+\ldots+k_n^{\nu})} |\Lambda k_1, \ldots, \Lambda k_n\rangle \ .$$

(iii) Pokazati da se operator impulsa skalarnog polja pri Lorentz-ovim transformacijama transformiše kao vektor tj.

$$U(\Lambda, 0)P^{\mu}U^{-1}(\Lambda, 0) = \Lambda_{\nu}{}^{\mu}P^{\nu} .$$

(iv) Dokazati da je komutator $[\phi(x), \phi(y)]$ invarijantan pri delovanju Lorentz-ovih transformacija.

7.20 Operator parnosti skalarnog polja dat je sa

$$P = \exp\left[-i\frac{\pi}{2}\int d^3k\Big(a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) - a^\dagger(\vec{k})a(-\vec{k})\Big)\right].$$

(i) Pokazati da operator parnosti komutira sa hamiltonijanom.

(ii) Pokazati da je $PM_{ij}P^{-1} = M_{ij}$, gde je M_{ij} angularni moment.

7.21 Pri vremenskoj inverziji operator skalarnog polja transformiše se po

$$\tau\phi(x)\tau^{-1} = \eta\phi(-t,\ \vec{x}),$$

gde je τ antiunitaran operator vremenske inverzije a η fazni množitelj.

(i) Pokazati da je

$$\tau a(\vec{k})\tau^{-1} = \eta a(-\vec{k}),$$
$$\tau a(\vec{k})^\dagger\tau^{-1} = \eta a^\dagger(-\vec{k}).$$

(ii) Ispitati kako se hamiltonijan i impuls transformišu pri vremenskoj inverziji.

7.22 Pri konjugaciji naboja kompleksno skalarno polje se transformiše po zakonu

$$C\phi(x)C^{-1} = \eta_c\phi^\dagger(x),$$

gde je η_c fazni množitelj. Pokazati da je

$$CQC^{-1} = -Q,$$

gde je Q operator naelektrisanja.

Kanonsko kvantovanje Dirac-ovog polja

- Operatori Dirac-ovog polja su:

$$\psi = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sum_{r=1}^{2} \int d^3p \sqrt{\frac{m}{E_p}} \Big(u(\vec{p}, r) c(\vec{p}, r) e^{-ipx} + v(\vec{p}, r) d^{\dagger}(\vec{p}, r) e^{ipx} \Big) \ , \quad (8.A)$$

$$\bar{\psi} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sum_{r=1}^{2} \int d^3p \sqrt{\frac{m}{E_p}} \Big(\bar{u}(\vec{p}, r) c^{\dagger}(\vec{p}, r) e^{ipx} + \bar{v}(\vec{p}, r) d(\vec{p}, r) e^{-ipx} \Big) \ . \quad (8.B)$$

Operatori $c^{\dagger}(\vec{p}, r), d^{\dagger}(\vec{p}, r)$ i $c(\vec{p}, r), d(\vec{p}, r)$ su kreacioni odnosno anihilacioni operatori.

- Iz Dirac-ovog lagranžijana,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi \ ,$$

dobijamo konjugovane impulse:

$$\pi_{\psi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\psi^{\dagger}, \ \pi_{\bar{\psi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}} = 0 \ .$$

Čestice spina 1/2 zadovoljavaju Fermi-Dirac-ovu statistiku što nameće istovremene antikomutacione umesto komutacionih relacija:

$$\{\psi_a(t, \vec{x}), \psi_b^{\dagger}(t, \vec{y})\} = \delta_{ab}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad (8.C)$$

$$\{\psi_a(t, \vec{x}), \psi_b(t, \vec{y})\} = \{\psi_a^{\dagger}(t, \vec{x}), \psi_b^{\dagger}(t, \vec{y})\} = 0 \ . \quad (8.D)$$

Ove relacije povlače antikomutacione relacije između kreacionih i anihilacionih operatora:

$$\{c(\vec{p}, r), c^{\dagger}(\vec{q}, s)\} = \ \{d(\vec{p}, r), d^{\dagger}(\vec{q}, s)\} = \delta_{rs}\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \ , \quad (8.E)$$

dok su svi preostali antikomutatori jednaki nuli.

- Fock-ov prostor se izgrađuje standardno delovanjem kreacionim operatorima na vakuum $|0\rangle$. Stanja $c^\dagger(\vec{p},r)\,|0\rangle\,, d^\dagger(\vec{p},r)\,|0\rangle$ su jednočestično elektronsko odnosno pozitronsko stanje definisanog impulsa i polarizacije.

- Normalno uređenje operatora definisano je na isti način kao u slučaju skalarnog polja pri čemu ovde moramo voditi računa o antikomutacionim relacijama.

- Hamiltonijan, impuls i angularni moment Dirac-ovog polja definisani su u zadatku 5.16.

- Feynman-ov propagator za Dirac-ovo polje je

$$iS_F(x-y) = \langle 0|\, T\Big(\psi(x)\bar{\psi}(y)\Big)\,|0\rangle \ . \tag{8.F}$$

- Pri Lorentz-ovim transformacijama operator $\psi(x)$ se transformiše po unitarnoj reprezentaciji Lorentz-ove grupe:

$$U(\Lambda)\psi(x)U^{-1}(\Lambda) = S^{-1}(\Lambda)\psi(\Lambda x) \ . \tag{8.G}$$

- Transformacioni zakon Dirac-ovog polja pri prostornoj inverziji je

$$P\psi(t,\vec{x})P^{-1} = \gamma_0\psi(t,-\vec{x}) \ . \tag{8.H}$$

- Vremenska inverzija je antiunitarna operacija

$$\tau\psi(t,\vec{x})\tau^{-1} = T\psi(-t,\vec{x}) \ . \tag{8.I}$$

  Osobine matrice T, koja deluje na spinore, date su u četvroj glavi. Treba voditi računa o tome da je vremenska inverzija antiunitarna operacija te ona uključuje kompleksnu konjugaciju:

$$\tau(c...)\tau^{-1} = c^*\tau...\tau^{-1} \ .$$

- Konjugacija naboja transformiše polje ψ na sledeći način

$$\mathcal{C}\psi_a(x)\mathcal{C}^{-1} = (C\gamma_0)_{ab}\psi_b^\dagger(x) \ . \tag{8.J}$$

  Osobine matrice C dali smo u četvroj glavi.

- U ovoj glavi često se koriste relacije:

$$[AB,C] = A[B,C] + [A,C]B \ ,$$

$$[AB,C] = A\{B,C\} - \{A,C\}B \ . \tag{8.K}$$

8.1 Polazeći od antikomutacionih relacija (8.E) pokazati:

$$\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} = iS(x-y) = i(i\gamma_\mu\partial^\mu + m)\Delta(x-y)$$

$$\{\psi(x), \psi(y)\} = 0,$$

gde funkciju $\Delta(x-y)$ treba odrediti. Pokazati da se izraz $iS(x-y)$ za $x_0 = y_0$ svodi na $\gamma_0\delta(\vec{x}-\vec{y})$, tj. da u tom slučaju dobijamo istovremene antikomutacione relacije za Dirac-ovo polje.

8.2 Hamiltonijan Dirac-ovog polja je

$$H = \int d^3x : \psi^\dagger i\partial_t\psi : \ .$$

(i) Pokazati da je energija Dirac-ovog polja

$$H = \sum_r \int d^3p E_p \left(c^\dagger(\vec{p}, r)c(\vec{p}, r) + d^\dagger(\vec{p}, r)d(\vec{p}, r)\right) \ ,$$

gde je $E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. Kakav rezultat bi se dobio da smo u procesu kvantovanja koristili komutator umesto antikomutatora?

(ii) Pokazati da je $i[H,\ \psi(x)] = \frac{\partial}{\partial t}\psi(x)$. Prokomentarisati smisao ovog rezultata.

8.3 Izračunati $[H,\ c^\dagger(\vec{p}, r)c(\vec{p}, r)]$.

8.4 Polazeći od zakona transformacije spinorskog polja u odnosu na Lorentz-ove transformacije pokazati da su generatori tih transformacija

$$M_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) + \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}.$$

8.5 Angularni moment Dirac-ovog polja je

$$M_{\mu\nu} = \int d^3x\psi^\dagger(x)\left[i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) + \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}\right]\psi(x) \ .$$

(i) Pokazati da je

$$[M_{\mu\nu},\ \psi(x)] = -i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)\psi(x) - \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}\psi(x),$$

i prokomentarisati smisao komutatora.

(ii) Pokazati da je $[M_{\mu\nu},\ P_\rho] = i(g_{\nu\rho}P_\mu - g_{\mu\rho}P_\nu)$, gde je P_μ impuls Dirac-ovog polja.

8.6 Pokazati da je helicitet Dirac-ovog polja dat sa

$$S_p = \frac{1}{2}\sum_r \int d^3p(-1)^{r+1}[c^\dagger(\vec{p},r)c(\vec{p},r) + d^\dagger(\vec{p},r)d(\vec{p},r)].$$

8.7 Dato je dvočestično stanje $|p_1, r_1; p_2, r_2\rangle = c^\dagger(p_1, r_1)c^\dagger(p_2, r_2)\,|0\rangle$. Odrediti energiju, naelektrisanje i helicitet datog stanja. Da li je dato stanje antisimetrično?

8.8 Pokazati da naboji iz zadatka 5.11 zadovoljavaju komutacione relacije:

$$[Q^a,\ Q^b] = i\epsilon^{abc}Q^c.$$

8.9 Kao što je pokazano u zadatku 5.18 dejstvo za bezmaseno Dirac-ovo polje je invarijantno na dilatacije. Naći očuvani naboj $D = \int d^3xj^0$ pri dilatacijama i pokazati da je

$$[D, P^\mu] = -iP^\mu\ .$$

8.10 Za teoriju čiji je lagranžijan

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - gx^2\bar{\psi}\psi\ ,$$

gde je g konstanta

(i) naći tenzor energije impulsa $T_{\mu\nu}$ i njegovu divergenciju $\partial_\mu T^{\mu\nu}$. Prokomentarisati rezultat;

(ii) izračunati komutator $[P^0(t), P^i(t)]$;

(iii) naći četvorodivergenciju "angularnog momenta" $M^{\mu\alpha\beta}$.

8.11 Razmotriti komutator $[J_\mu(x),\ J_\nu(y)]$ između struja $J_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$.

(i) Pokazati da je gornji komutator Lorentz kovarijantan.

(ii) Pokazati da je za interval prostornog tipa, $(x-y)^2 < 0$, gornji komutator jednak nuli.

(iii) Ako se antikomutacione relacije (8.E) zamene sa odgovarajućim komutacionim relacijama da li važi rezultat (ii)?

8.12 Izračunati $\langle 0|\,\bar{\psi}(x_1)\psi(x_2)\psi(x_3)\bar{\psi}(x_4)\,|0\rangle$.

8.13 Pokazati : $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi := \frac{1}{2}[\bar{\psi}, \gamma^\mu\psi]$.

8.14 Pokazati da je izraz $\langle 0|\,T(\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(y))\,|0\rangle$ jednak 0 za $\Gamma = \{\gamma_5, \gamma_5\gamma_\mu\}$, dok je za $\Gamma = \gamma_\mu\gamma_\nu$ jednak $-4img_{\mu\nu}\Delta_F(y-x)$.

8.15 Dirac-ov spinor izražen preko dvokomponentnih spinora φ i χ ima oblik

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ -i\sigma_2\chi^* \end{pmatrix} .$$

(i) Pokazati da Majorana spinor ima oblik

$$\psi_M = \begin{pmatrix} \chi \\ -i\sigma_2\chi^* \end{pmatrix} .$$

(ii) Dokazati identitete:

$$\bar{\psi}_M\phi_M = \bar{\phi}_M\psi_M,\ \bar{\psi}_M\gamma^\mu\phi_M = -\bar{\phi}_M\gamma^\mu\psi_M,\ \bar{\psi}_M\gamma_5\phi_M = \bar{\phi}_M\gamma_5\psi_M,$$

$$\bar{\psi}_M\gamma^\mu\gamma_5\phi_M = \bar{\phi}_M\gamma^\mu\gamma_5\psi_M,\ \bar{\psi}_M\sigma_{\mu\nu}\phi_M = -\bar{\phi}_M\sigma_{\mu\nu}\psi_M\ .$$

(iii) Izraziti Majorana spinor, $\psi_M = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi + \psi_c)$ preko kreacionih i anihilacionih operatora Dirac-ovog polja. Uvesti kreacione i anihilacione operatore za Majorana polje i naći odgovarajuće antikomutacione relacije.

(iv) Izraziti lagranžijan interakcije Dirac-ovog i elektromagnetnog polja preko Majorana spinora.

8.16 Ispitati kako se operatori $\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)$ i $\bar{\psi}(x)\gamma_5\partial_\mu\psi(x)$ transformišu pri Lorentz-ovim i diskretnim transformacijama.

8.17 Pokazati da je lagranžijan

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) + m\bar{\psi}(x)\psi(x)\ ,$$

invarijantan na Lorencove transformacije kao i na diskretne transformacije.

ZADACI 9

Kanonsko kvantovanje elektromagnetnog polja

- Lagranžijan elektromagnetnog polja $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu$, gde je j_μ struja polja materije daje (dinamičke) jednačine kretanja:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \ . \tag{9.A}$$

Na osnovu definicija tenzora jačine polja $F_{\mu\nu}$ direktno slede (kinematičke) jednačine:

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0 \ . \tag{9.B}$$

(9.A-B) su Maxwell-ove jednačine elektrodinamike. Jednačina (9.B) se često naziva Bianchi-jev identitet.

- Usled kalibracione simetrije na potencijale se može nametnuti kalibracioni uslov. Najčešće korišćeni kalibracioni uslovi su:

$$\begin{aligned} \text{Lorentz} - \text{ov} \quad & \partial_\mu \mathrm{A}^\mu = 0 \ , \\ \text{Coulomb} - \text{ov} \quad & \nabla \vec{\mathrm{A}} = 0 \ , \\ \text{vremenski} \quad & \mathrm{A}_0 = 0 \ , \\ \text{aksijalni} \quad & \mathrm{A}_3 = 0 \ . \end{aligned}$$

- Operator slobodnog elektromagnetnog polja razvijen po ravnim monohromatskim talasima je:

$$A^\mu(x) = \sum_{\lambda=0}^{3} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}} \Big(a_\lambda(\vec{k})\epsilon^\mu_\lambda(\vec{k})e^{-ikx} + a^\dagger_\lambda(\vec{k})\epsilon^\mu_\lambda(\vec{k})e^{ikx} \Big) \ , \tag{9.C}$$

gde je $\omega_k = |\vec{k}|$. Od četiri polarizaciona vektora, $\epsilon^\mu_\lambda(\vec{k})$ samo su dva nezavisna. U (9.C) pretpostavili smo da su polarizacioni vektori realni. Generalizacija na slučaj kompleksnih vektora je očigledna.

- Relacije kompletnosti:

$$\sum_{\lambda=0}^{3} g_{\lambda\lambda}\epsilon^\mu_\lambda(\vec{k})\epsilon^\nu_\lambda(\vec{k}) = g^{\mu\nu} \ . \tag{9.D}$$

Iz ove relacije dobija se

$$\sum_{\lambda=1}^{2} \epsilon^i_\lambda(\vec{k})\epsilon^j_\lambda(\vec{k}) = -g^{ij} - \frac{k^i k^j}{(k\cdot n)^2} + \frac{k^i n^j + k^j n^i}{k\cdot n} \ , \tag{9.E}$$

gde je $n^\mu = (1,0,0,0)$.

- Kvantizacija u Lorentz-ovoj kalibraciji polazi od istovremenih komutacionih relacija:

$$\begin{aligned} [A^\mu(t,\vec{x}), \pi^\nu(t,\vec{y})] &= ig^{\mu\nu}\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) \ , \\ [A^\mu(t,\vec{x}), A^\nu(t,\vec{y})] &= [\pi^\mu(t,\vec{x}), \pi^\nu(t,\vec{y})] = 0 \ , \end{aligned} \tag{9.F}$$

gde je $\pi^\nu = -\dot{A}^\nu$. Kreacioni i anihilacini operatori zadovoljavaju:

$$\begin{aligned} [a_\lambda(\vec{k}), a^\dagger_{\lambda'}(\vec{q})] &= -g_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{q}) \ , \\ [a_\lambda(\vec{k}), a_{\lambda'}(\vec{q})] &= [a^\dagger_\lambda(\vec{k}), a^\dagger_{\lambda'}(\vec{q})] = 0 \ . \end{aligned} \tag{9.G}$$

Stanja, $|\Phi\rangle$ zadovoljavaju uslov

$$\partial^\mu A^{(+)}_\mu |\Phi\rangle = 0 \ .$$

Ovo je tzv. Gupta-Bleuler-ov metod kvantizacije elektromagnetnog polja.

- U Coulomb-ovoj kalibraciji je

$$\vec{A}(x) = \sum_{\lambda=1}^{2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}} \Big(a_\lambda(\vec{k})\vec{\epsilon}_\lambda(\vec{k})e^{-ikx} + a^\dagger_\lambda(\vec{k})\vec{\epsilon}_\lambda(\vec{k})e^{ikx} \Big) \ , \tag{9.H}$$

dok je $A^0 = 0$. Istovremene komutacione relacije imaju oblik:

$$\begin{aligned} [A^i(t,\vec{x}), \pi^j(t,\vec{y})] &= -i\delta^{(3)}_{\perp ij}(\vec{x}-\vec{y}) \ , \\ [A^i(t,\vec{x}), A^j(t,\vec{y})] &= [\pi^i(t,\vec{x}), \pi^j(t,\vec{y})] = 0 \ , \end{aligned} \tag{9.I}$$

gde je $\vec{\pi} = \vec{E}$, a $\delta^{(3)}_{\perp ij}(\vec{x}-\vec{y})$ transverzalna delta funkcija,

$$\delta^{(3)}_{\perp ij}(\vec{x}-\vec{y}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})}\Big(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\vec{k}^2}\Big) \ .$$

Komutacione relacije između kreacionih i anihilacionih operatora su

$$[a_\lambda(\vec{k}), a^\dagger_{\lambda'}(\vec{q})] = \delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{q}) \ ,$$

$$[a_\lambda(\vec{k}), a_{\lambda'}(\vec{q})] = [a^\dagger_\lambda(\vec{k}), a^\dagger_{\lambda'}(\vec{q})] = 0 \ . \qquad (9.\mathrm{J})$$

- Feynman-ov propagator za elektromagnetno polje je

$$iD_F^{\mu\nu}(x-y) = \langle 0|\, T(A^\mu(x)A^\nu(y))\,|0\rangle \ .$$

9.1 Polazeći od komutacionih relacija (9.G) pokazati

$$[A^\mu(t,\vec{x}), \dot{A}^\nu(t,\vec{y})] = -ig^{\mu\nu}\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) \ .$$

9.2 Naći komutator između komponenti potencijala

$$[A^\mu(x), A^\nu(y)] \ ,$$

u Lorentz-ovoj odnosno Coulomb-ovoj kalibraciji.

9.3 Izračunati komutatore između komponenti jačina polja:

$$[E^i(x), E^j(y)] \ ,$$

$$[B^i(x), B^j(y)] \ ,$$

$$[E^i(x), B^j(y)] \ .$$

9.4 Pokazati da je $[P^\mu, A^\nu] = -i\partial^\mu A^\nu$.

9.5 Odrediti helicitet fotona koji je opisan polarizacionim vektorima $\vec{\epsilon}_+(k\vec{e}_z) = 2^{-1/2}(0,1,i,0)^T$ i $\vec{\epsilon}_-(k\vec{e}_z) = 2^{-1/2}(0,1,-i,0)^T$.

9.6 Proizvoljno stanje koje ne sadrži transverzalne fotone ima oblik

$$|\Phi\rangle = \sum_n C_n |\Phi_n\rangle \ ,$$

gde su C_n konstante dok je

$$|\Phi_n\rangle = \int d^3k_1 \dots d^3k_n f(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n) \prod_{i=1}^{n} (a_0^\dagger(\vec{k}_i) - a_3^\dagger(\vec{k}_i)) |0\rangle \ ,$$

gde su $f(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n)$ proizvoljne funkcije.

(i) Pokazati da je $\left\langle \Phi_n \middle| \Phi_n \right\rangle = \delta_{n,0}$.

(ii) Pokazati da je $\langle \Phi | A^\mu(x) | \Phi \rangle$ čist gejdž.

9.7 Date su veličine $P^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - (k^\mu \bar{k}^\nu + k^\nu \bar{k}^\mu)/k \cdot \bar{k}$ i $P_\perp^{\mu\nu} = (k^\mu \bar{k}^\nu + k^\nu \bar{k}^\mu)/k \cdot \bar{k}$, gde je $\bar{k}^\mu = (k^0, -\vec{k})$.
Izračunati: $P^{\mu\nu} P_{\nu\sigma}$, $P_\perp^{\mu\nu} P_{\nu\sigma\perp}$, $P^{\mu\nu} + P_\perp^{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu} P_{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu} P_{\mu\nu}^\perp$, $P^{\mu\nu} P_\perp^{\nu\sigma}$, ako je $k^2 = 0$.

9.8 Angularni moment elektromagnetnog polja definisan je sa $J^l = \frac{1}{2} \epsilon^{lij} M^{ij}$ gde su M^{ij} određeni u zadatku 5.16.

(i) Izraziti $\vec{J}$ preko potencijala elektromagnetnog polja u Coulomb-ovoj kalibraciji.

(ii) Izraziti spinski deo uglovnog momenta preko kreacionih i anihilacionih operatora $a_\lambda(\vec{k})$, $a_\lambda^\dagger(\vec{k})$ i dijagonalizovati ga.

(iii) Pokazati da su stanja

$$a_\pm(\vec{q}) |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1(\vec{q}) \mp i a_2(\vec{q})) |0\rangle \ ,$$

svojstvena stanja za operator heliciteta sa svojstvenim vrednostima ± 1.

(iv) Naći komutator $[J^l, A^m(\vec{y}, t)]$.

9.9 Pokazati da je

$$\langle 0 | \{E^m(x), B^n(y)\} | 0 \rangle = -\frac{1}{2\pi^2} \epsilon^{njm} \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial r^j} \frac{1}{(x-y)^2} \ ,$$

gde je $x_0 - y_0 = \tau$, $\vec{x} - \vec{y} = r$.

Zadaci 10

Procesi u najnižem redu teorije perturbacije

- Wick-ova teorema je

$$T(ABC\dots YZ) =: \{ABC\dots YZ + \text{"sve kontrakcije"}\} : \tag{10.A}$$

U slučaju fermiona potrebno je voditi računa o antikomutacionim relacijama, tj. o činjenici da se pri svakoj neparnoj permutacija fermi-polja pojavljuje znak minus.

- S matrica za teoriju u kojoj je $\mathcal{H}_I$ gustina hamiltonijana interakcije u interakcionoj slici je

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int \dots \int d^4x_1 \dots d^4x_n \, T\Big(\mathcal{H}_I(x_1)\cdots\mathcal{H}_I(x_n)\Big) \; . \tag{10.B}$$

- Matrični element S matrice ima generalni oblik

$$S_{fi} = (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_f - p_i)\prod_b \frac{1}{\sqrt{2VE}} \prod_f \sqrt{\frac{m}{VE}}\mathcal{M} \; , \tag{10.C}$$

gde su p_i odnosno p_f ukupan inicijalni odnosno finalni impuls, a $\mathcal{M}$ Feynman-ova amplituda prelaza koju određujemo na osnovu dijagrama. Delta funkcija ukazuje na zakon održanja energije i impulsa u procesu. Takođe u izrazu (10.C) pojavljuju se i normalizacioni faktori koji zavise od toga da li se radi u bozonima ili fermionima. U ovoj glavi talasnu funkciju ćemo normalizovati na zapreminu V . To dovodi do zamene faktora $(2\pi)^{\frac{3}{2}}$ sa $\sqrt{V}$. Sa neprekidnog spektra prelazimo na diskretan što ima za posledicu prelazak sa Dirac-ove delta funkcije na Kroneker-ovu deltu.

- Diferencijalni presek za rasejanje dve čestice u N finalnih čestica je

$$d\sigma = \frac{|S_{fi}|^2}{T}\frac{1}{|\vec{J}_{\text{in}}|}\prod_{i=1}^{N}\frac{Vd^3p_i}{(2\pi)^3} \ , \tag{10.D}$$

gde je $\vec{J}_{\text{in}}$ fluks upadnih čestica:

$$|\vec{J}_{\text{in}}| = v_{\text{rel}}/V \ .$$

Relativna brzina v_{rel} je

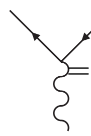
$$v_{\text{rel}} = |\vec{p}_1|/E_1 \ ,$$

u laboratorijskom sistemu (čestica 2 miruje), dok je u sistemu centra masa određena sa

$$v_{\text{rel}} = |\vec{p}_1|\frac{E_1+E_2}{E_1E_2} \ ,$$

gde je $\vec{p}_1$ impuls čestice 1, a $E_{1,2}$ energije čestica. U izrazu (10.D) $Vd^3p/(2\pi)^3$ su fazni faktori.

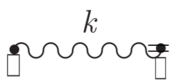
- Feynman-ova pravila u kvantnoj elektrodinamici su:
  - Verteks:



$= ie\gamma^\mu$

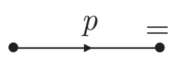
  - Fotonski i elektronski propagatori:

$iD_{F\mu\nu} =$



$= -\dfrac{ig_{\mu\nu}}{k^2+i\epsilon}$,

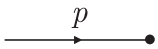
$iS_F(p) =$



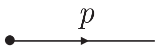
$= \dfrac{i}{\not{p}-m+i\epsilon}$.

∘ Spoljašnje linije su

a) fermioni:

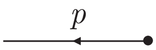


$= u(p,s)$ početni

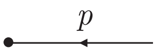


$= \bar{u}(p,s)$ finalni

b) antifermioni:

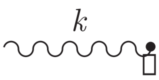


$= v(p,s)$ početni

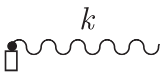


$= \bar{v}(p,s)$ finalni

c) fotoni:



$= \varepsilon_{\mu}^{m}(k)$ početni



$= \varepsilon_{\mu}^{m*}(k)$ finalni

∘ Spinorski faktori se pišu sa desna na levo duž svake fermionske linije. Redosled pisanja je bitan jer se radi o matričnom množenju odgovarajućih faktora.

- Za svaku petlju impulsa k, moramo prointegraliti po tom impulsu: $\int d^4k/(2\pi)^4$. To odgovara kvantno-mehaničkom sabiranju amplituda.
- U slučaju fermionske petlje pored prethodnog pravila potrebno je uzeti trag i pomnožiti dobijeni izraz sa -1.
- Ukoliko se dva dijagrama razlikuju za neparan broj fermionskih izmena onda se oni moraju razlikovati za relativan znak minus.

10.1 Za proces

$$A(E_1, \vec{p}_1) + B(E_2, \vec{p}_2) \to C(E_1', \vec{p}_1') + D(E_2', \vec{p}_2')$$

pokazati da je diferencijalni efikasni presek u sistemu centra masa dat sa

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} = \frac{1}{4\pi^2(E_1+E_2)^2}\frac{|\ \vec{p}_1'\ |}{|\ \vec{p}_1\ |} m_A m_B m_C m_D |\mathcal{M}|^2 \ ,$$

gde je $\mathcal{M}$ Feynman-ova amplituda za dati proces. Sve čestice u procesu su fermioni.

10.2 Zadat je integral

$$\int \frac{d^3p}{2E_p}\frac{d^3q}{2E_q}\delta^{(3)}(\vec{p}+\vec{q}-\vec{P})\delta(E_p+E_q-P^0).$$

gde je $E_p^2 = \vec{p}^2 + m^2$ i $E_q^2 = \vec{q}^2 + m'^2$. Pokazati da je gornji integral Lorentz invarijantan. Izračunati ga u sistemu u kome je $\vec{P} = 0$.

10.3 Ako je

$$\mathcal{M} = \bar{u}(\vec{p}, r)\gamma_\mu(1-\gamma_5)u(\vec{q}, s)\epsilon^\mu$$

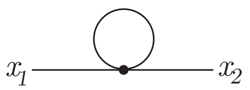
naći $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$ usrednjen po spinskim stanjima fermiona.

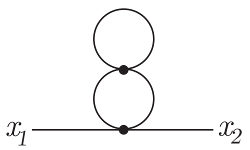
10.4 Primenom Wick-ove teoreme izračunati sledeće vakuumske očekivane vrednosti:

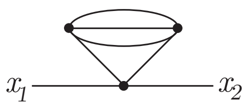
(i) $\langle 0|\, T(\phi^4(x)\phi^4(y))\, |0\rangle$,

(ii) $\langle 0|\, T(\bar{\psi}(x)\psi(x)\bar{\psi}(y)\psi(y))\ |\ 0\rangle$.

10.5 Lagranžijan interakcije u ϕ^4 teoriji je $\mathcal{L}_{int} = -\frac{\lambda}{4!}\phi^4$. Primenom Wick-ove teoreme odrediti faktore simetrije S dijagrama sa slike.

i) 

ii) 

iii) 

Rezultat proveriti primenom formule:

$$S = g \prod_{n=2,3,..} 2^{\beta}(n!)^{\alpha_n} \ ,$$

gde je g broj mogućih permutacija verteksa koje ostavljaju neizmenjenim dijagram sa fiksnim spoljašnjim linijama, α_n broj verteksnih parova povezanih sa n identičnih linija, dok je β broj linija koje spajaju verteks sam sa sobom.

10.6 U okviru ϕ^3 teorije izračunati

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{-i\lambda}{3!}\Big)^2 \int d^4y_1 d^4y_2 \left\langle 0\right| T(\phi(x_1)\phi(x_2)\phi^3(y_1)\phi^3(y_2)) \left|0\right\rangle \ .$$

10.7 Za QED procese:

(i) $\mu^-\mu^+ \to e^-e^+$,

(ii) $e^-\mu^+ \to e^-\mu^+$,

koristeći Feynman-ove dijagrame, napisati izraze za Feynman-ovu amplitudu, $\mathcal{M}$. Naći srednju vrednost kvadrata amplitude $\langle|\mathcal{M}|^2\rangle$ usrednjenu po spinskim stanjima ulaznih čestica i sumiran po spinskim stanjima finalnih čestica u procesu. Na osnovu toga odrediti diferencijalni presek za rasejanje u sistemu centra mase u ultrarelativističkom limesu.

10.8 Odrediti diferencijalni presek za Compton-ovo rasejanje, $e^-\gamma \to e^-\gamma$ u laboratorijskom sistemu reference.

10.9 Naći diferencijalni presek za rasejanje elektrona u spoljašnjem potencijalu (a, d, k su konstante)

(i) $A^\mu(x) = (ae^{-k^2\vec{x}^2}, 0, 0, 0)$,

(ii) $A^\mu(x) = (0, 0, 0, \frac{g}{r}e^{-\frac{r}{a}})$.

10.10 Naći presek u jedinici zapremine za kreiranje elektron-pozitronskog para u potencijalu

$$A^\mu = (0, 0, ae^{-i\omega t}, 0),$$

gde su ω i a konstante.

10.11 Naći diferencijalni presek za rasejanje elektrona u spoljašnjem potencijalu

$$A^\mu = (0, 0, 0, ae^{-k^2\vec{x}^2}),$$

u teoriji koja se od kvantne elektrodinamike razlikuje samo po tome što je verteks $ie\gamma_\mu$ zamenjen sa $ie\gamma_\mu(1-\gamma_5)$.

10.12 Naći diferencijalni presek za rasejanje pozitrona na potencijalu

$$A^\mu = (g/r, 0, 0, 0),$$

gde je g konstanta u teoriji u kojoj je amplituda prelaza data sa

$$S_{fi} = ie\int d^4x \bar{\psi}_f(x)\partial_\mu\psi_i(x)A^\mu(x) \ .$$

10.13 Naći presek za rasejanje elektrona sa pozitivnim helicitetom u potencijalu

$$A^\mu = (a\delta^{(3)}(\vec{x}), 0, 0, 0),$$

gde je a konstanta.

10.14 Naći diferencijalni presek za rasejanje e^- sa mionom μ^+

$$e^-\mu^+ \to e^-\mu^+ \ ,$$

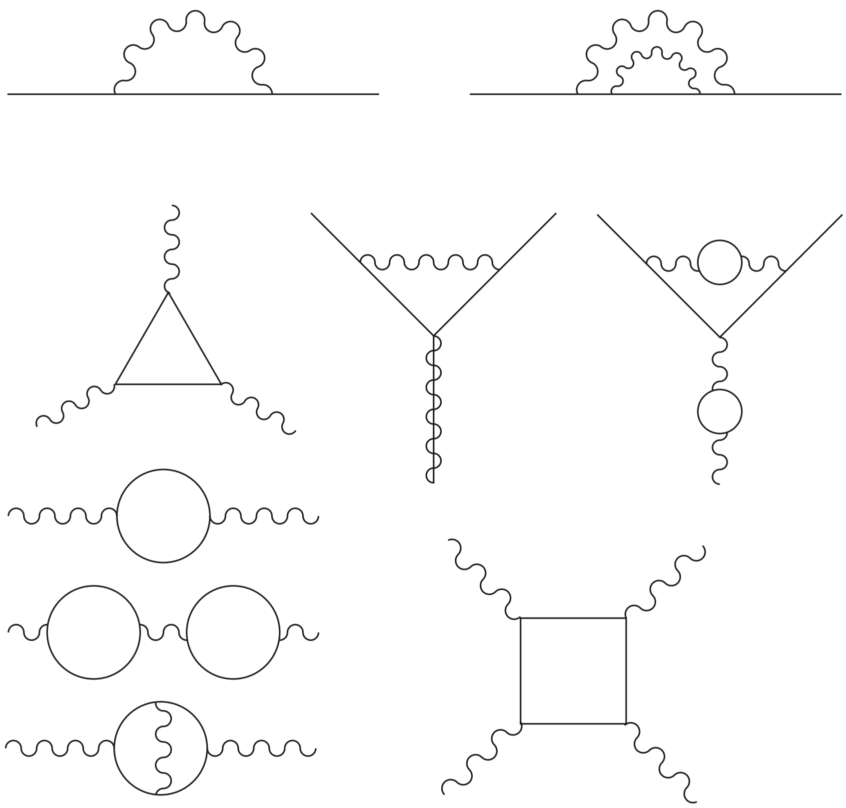
u sistemu centra masa ako ulazne čestice imaju negativan helicitet dok je spinsko stanje finalnih čestica proizvoljno.

10.15 Teorija koja opisuje interakciju skalarnog polja sa fermionskim opisana je lagranžijanom

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 + \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - M)\psi - g\bar{\psi}\gamma_5\psi\phi \ .$$

Naći kvadrat srednje vrednosti amplitude prelaza u jedinici vremena i totalni presek za rasejanje u sistemu centra masa za rasejanje dva fermiona u najnižem redu teorije perturbacije.

10.16 Za Feynman-ove dijagrame, prikazane na slici naći Feynman-ove amplitude.



Renormalizacija i regularizacija

- Dijagrami višeg reda u teoriji polja su često divergentni. Zbog toga se oni prvo regularišu. Najčešće se primenjuje dimenziona regularizacija pri kojoj se umesto u 4 dimenzije integrali računaju u $D = 4 - \epsilon$ dimenzija. Time se iz datog integrala izdvaja singularan deo, tipa $1/\epsilon^{\alpha}$. Pauli-Villars-ova regularizacija sastoji se u tome da se u teoriju uključe dopunska polja. Uzima se da u polaznom lagranžijanu konstante interakcije i mase čestica nisu prave, tj. merljive već su beskonačne tzv. gole veličine. Renormalizacijom konstanti interakcije, masa i polja u teoriji se beskonačnosti apsorbuju, tj. od nefizičkih, divergentnih veličina dobijaju se konačne opservabilne veličine.

- Pri dimenzionoj regularizaciji često se pojavljuju sledeći integrali:

$$\int d^D k \frac{1}{(k^2 + 2p\cdot k - m^2 + i\epsilon)^n} = i(-1)^n \pi^{\frac{D}{2}} \frac{\Gamma\Big(n - \frac{D}{2}\Big)}{\Gamma(n)} \frac{1}{(m^2+p^2)^{n-\frac{D}{2}}} \ , \tag{11.A}$$

$$\int d^D k \frac{k^\mu}{(k^2 + 2p\cdot k - m^2 + i\epsilon)^n} = -i(-1)^n \pi^{\frac{D}{2}} \frac{\Gamma\Big(n - \frac{D}{2}\Big)}{\Gamma(n)} \frac{p^\mu}{(m^2+p^2)^{n-\frac{D}{2}}} \ , \tag{11.B}$$

$$\begin{aligned}\int d^D k \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 + 2p\cdot k - m^2 + i\epsilon)^n} &= \frac{i(-1)^n \pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(n)(m^2+p^2)^{n-\frac{D}{2}}}\Big[p^\mu p^\nu \Gamma\Big(n - \frac{D}{2}\Big) \\ &- \frac{1}{2} g^{\mu\nu}(p^2+m^2)\Gamma\Big(n - \frac{D}{2} - 1\Big)\Big] \ ,\end{aligned} \tag{11.C}$$

$$\begin{aligned}\int d^D k \frac{k^\mu k^\nu k^\rho}{(k^2 + 2p\cdot k - m^2 + i\epsilon)^n} &= \frac{i(-1)^n \pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(n)(m^2+p^2)^{n-\frac{D}{2}}}\Big[-p^\mu p^\nu p^\rho \Gamma\Big(n - \frac{D}{2}\Big) \\ &+ \frac{1}{2}(g^{\mu\nu}p^\rho + g^{\mu\rho}p^\nu + g^{\nu\rho}p^\mu)(p^2+m^2)\Gamma\Big(n - \frac{D}{2} - 1\Big)\Big] \ ,\end{aligned} \tag{11.D}$$

$$\int d^Dk \frac{k^\mu k^\nu k^\rho k^\sigma}{(k^2+2p\cdot k-m^2+i\epsilon)^n} = \frac{i(-1)^n \pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(n)(m^2+p^2)^{n-\frac{D}{2}}} \Big[p^\mu p^\nu p^\rho p^\sigma \Gamma\Big(n-\frac{D}{2}\Big)$$
$$-\frac{1}{2}(g^{\mu\nu}p^\rho p^\sigma + g^{\mu\rho}p^\nu p^\sigma + g^{\mu\sigma}p^\nu p^\rho + g^{\nu\rho}p^\mu p^\sigma + g^{\nu\sigma}p^\rho p^\mu + g^{\rho\sigma}p^\mu p^\nu)$$
$$\times (p^2+m^2)\Gamma\Big(n-\frac{D}{2}-1\Big) + \frac{1}{4}(g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} + g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}$$
$$+ g_{\mu\sigma}g_{\rho\nu})(p^2+m^2)^2\Gamma\Big(n-\frac{D}{2}-2\Big)\Big] \ . \tag{11.E}$$

- Za gama funkciju važi

$$\Gamma(-n+\epsilon) = \frac{(-1)^n}{n!}\Big(\frac{1}{\epsilon} + \psi(n+1) + o(\epsilon)\Big) \ , \tag{11.F}$$

gde je $n \in N$ i

$$\psi(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \gamma \ .$$

Konstanta $\gamma = 0,5772$ je Euler-Mascheroni-jeva konstanta.

- Opšti izraz za Feynman-ovu parametrizaciju dat je u zadatku 11.1. Sada ćemo ipak navesti nekoliko najčešće korišćenih izraza:

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[xA+(1-x)B]^2} \ , \tag{11.G}$$

$$\frac{1}{ABC} = 2\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz \frac{1}{[A+(B-A)x+(C-A)z]^3} \ . \tag{11.H}$$

11.1 Dokazati (Feynman-ova parametrizacija)

$$\frac{1}{A_1 ... A_n} = (n-1)! \int_0^1 dx_1 ... dx_n \frac{\delta(x_1 + ... + x_n - 1)}{(x_1 A_1 + ... x_n A_n)^n} \ .$$

11.2 Dokazati formulu (11.A).

11.3 Regularizovati integral

$$I = \int d^4k \frac{1}{k^2} \frac{1}{(k+p)^2 - m^2} \ ,$$

Pauli-Villars-ovom regularizacijom.

11.4 Za teoriju opisanu lagranžijanom

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{g}{3!}\phi^3 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \ ,$$

odrediti sopstvenu energiju skalarne čestice i njenu renormalizovanu masu.

11.5 Lagranžijan interakcije dva skalarna polja σ i π zadat je sa

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \pi)^2 - \frac{m^2}{2}\sigma^2 - \lambda v \sigma^3 - \lambda v \sigma \pi^2 - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \pi^2)^2 \ ,$$

gde je $v^2 = \frac{m^2}{2\lambda}$. Primetite da je polje π bezmaseno. Pokazati da ono ostaje bezmaseno i nakon uračunavanja kvantnih efekata na jednu petlju.

11.6 Razmotrimo teoriju interakcije dva skalana polja ϕ i χ, čiji je lagranžijan

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{2}(\partial\chi)^2 - \frac{1}{2}M^2\chi^2 - g\phi^2\chi \ ,$$

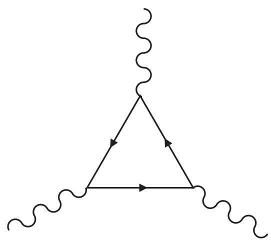
(i) Izračunati sopstvenu energiju χ čestice, $\Pi(p^2)$.

(ii) Izračunati širinu raspada, χ čestice u dve ϕ čestice.

(iii) Pokazati da važi

$$\text{Im}\ \Pi(M^2) = -M\Gamma \ .$$

11.7 Naći divergentni deo dijagrama sa slike.



Pokazati da se ovaj dijagram poništava sa dijagramom kod koga se elektronska petlja obilazi u suprotnom smeru.

11.8 Polarizacija vakuuma u QED ima oblik

$$i\Pi_{\mu\nu}(q) = i(q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu})\Pi(q^2).$$

(i) Pokazati da je imaginarni deo "dielektrične konstante" $\Pi(q^2)$ dat sa

$$\text{Im}\ \Pi(q^2) = \frac{e^2}{12\pi}(1 + \frac{2m^2}{q^2})\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}}\theta(1 - \frac{4m^2}{q^2})$$

(ii) Pokazati da je

$$\Pi(q^2) - \Pi(0) = q^2 \int_{4m^2}^{\infty} ds\ \frac{\text{Im}\Pi(s)}{s(s - q^2 - i\epsilon)}.$$

11.9 U skalarnoj elektrodinamici polarizaciji vakuuma, u drugom redu teorije perturbacije doprinose dva dijagrama. Dimenzionom regularizacijom pokazati da je divergentni deo tih dijagrama dat sa

$$\frac{e^2}{24\pi^2}\frac{1}{\epsilon}(p_\mu p_\nu - p^2 g_{\mu\nu}).$$

11.10 Lagranžijan teorije koja opisuje interakciju skalarnog i fermionskog polja dat je sa

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 + \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - M)\psi + g\bar{\psi}\psi\phi\ .$$

(i) Naći izraz za sopstvenu energiju elektrona, $\Sigma(p)$ u najnižem redu teorije perturbacije i ispitati njegov stepen divergencije.

(ii) Dimenzionom regularizacijom naći divergentni i konačni deo izraza $\Sigma(p)$.

Deo II

Rešenja

Rešenja 1

Lorentz-ova i Poincare-ova grupa

1.1 Kvadrat dužine četvorovektora, x je $x^2 = g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$. Kako je $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\rho x^\rho$ i $x'^2 = x^2$ imamo

$$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma x^\rho x^\sigma = g_{\rho\sigma}x^\rho x^\sigma \qquad (1.1\text{-}1)$$

Pošto (1.1-1) važi za proizvoljan vektor x, to je $\Lambda^\mu{}_\rho g_{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma}$, što se može prepisati u obliku

$$(\Lambda^T)_\rho{}^\mu g_{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma} \Rightarrow \Lambda^T g\Lambda = g \ , \qquad (1.1\text{-}2)$$

što predstavlja traženi uslov.

Pokažimo da ove transformacije čine grupu. Ako su Λ_1 i Λ_2 Lorentz-ove transformacije tada je i njihov proizvod, $\Lambda_1\Lambda_2$ Lorentz-ova transformacija jer zadovaljava uslov (1.1-2):

$$(\Lambda_1\Lambda_2)^T g(\Lambda_1\Lambda_2) = \Lambda_2^T(\Lambda_1^T g\Lambda_1)\Lambda_2 = \Lambda_2^T g\Lambda_2 = g \ .$$

Time smo pokazali zatvorenost. Množenje matrica je u opštem slučaju asocijativno, te ta osobina važi i za Lorentz-ove matrice Λ. Jedinična matrica I zadovoljava uslov (1.1-2) i ona je jedinični element u grupi. Uzimanjem determinante izraza (1.1-2) vidi se da je $\det\Lambda = \pm 1$, dakle $\det\Lambda \neq 0$, te postoji Λ^{-1}. Iz (1.1-2) inverzni element je $\Lambda^{-1} = g^{-1}\Lambda^T g$, odnosno $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = g^{\mu\rho}\Lambda^\sigma{}_\rho g_{\sigma\nu} = \Lambda_\nu{}^\mu$, u komponentnoj notaciji.

1.2 Za infinitezimalne Lorentz-ove transformacije iz (1.1-2) imamo

$$\begin{aligned}(\delta^\mu_\rho + \omega^\mu{}_\rho)g_{\mu\nu}(\delta^\nu_\sigma + \omega^\nu{}_\sigma) + o(\omega^2) &= g_{\rho\sigma}\\ g_{\rho\sigma} + \omega^\mu{}_\rho g_{\mu\nu}\delta^\nu_\sigma + \omega^\nu{}_\sigma g_{\mu\nu}\delta^\mu_\rho + o(\omega^2) &= g_{\rho\sigma} \ .\end{aligned}$$

pa je

$$\omega_{\rho\sigma} + \omega_{\sigma\rho} = 0 \;\Rightarrow\; \omega_{\rho\sigma} = -\omega_{\sigma\rho} \; .$$

Kako su parametri $\omega_{\mu\nu}$ antisimetrični, to ih je šest nezavisnih, pa je Lorentz-ova grupa šestoparametarska grupa.

1.3 Zadata relacija je u skladu sa definicijama determinante i totalno antisimetričnog ϵ simbola.

1.4 Iz (1.1-2) sledi $\delta^\sigma_\rho = \delta^\nu_\mu \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda_\nu{}^\sigma$, odakle je $\delta'^\sigma_\rho = \delta^\sigma_\rho$. Slično je i

$$\epsilon'_{\mu\nu\rho\sigma} = \Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda_\nu{}^\beta \Lambda_\rho{}^\gamma \Lambda_\sigma{}^\delta \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \det(\Lambda^{-1})\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \; ,$$

jer je $\det\Lambda^{-1} = 1$ za prave ortohrone Lorentz-ove transformacije. Dakle, $\epsilon-$simbol je definisan nezavisno od inercijalnog sistema reference. Napomenimo da se komponente $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ dobijaju pri dejstvu antisimetričnog tenzora ϵ na bazne vektore $\mathbf{e_0}, \ldots, \mathbf{e_3}$, čime se dobija $\epsilon(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu, \mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\sigma) = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$. $\epsilon-$simbol možemo zapisati u obliku $\epsilon = \omega^{\mathbf{0}} \wedge \omega^{\mathbf{1}} \wedge \omega^{\mathbf{2}} \wedge \omega^{\mathbf{3}}$, gde su ω^μ bazne jedan–forme.

1.5 Rezultati su

$$\begin{aligned}
\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\beta\gamma\delta} &= -\delta^\nu_\beta\delta^\rho_\gamma\delta^\sigma_\delta + \delta^\nu_\gamma\delta^\rho_\beta\delta^\sigma_\delta + \delta^\nu_\beta\delta^\rho_\delta\delta^\sigma_\gamma - \delta^\nu_\gamma\delta^\rho_\delta\delta^\sigma_\beta - \delta^\nu_\delta\delta^\rho_\beta\delta^\sigma_\gamma + \delta^\nu_\delta\delta^\rho_\gamma\delta^\sigma_\beta, \\
\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\gamma\delta} &= -2(\delta^\rho_\gamma\delta^\sigma_\delta - \delta^\rho_\delta\delta^\sigma_\gamma), \\
\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\rho\delta} &= -6\delta^\sigma_\delta, \\
\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} &= -24
\end{aligned}$$

1.6 (i) Matrica X je

$$X = \begin{pmatrix} x^0 - x^3 & -x^1 + ix^2 \\ -x^1 - ix^2 & x^0 + x^3 \end{pmatrix} \; ,$$

pa je $\det X = (x^0)^2 - (\vec{x})^2 = x^2$. Pri zadatoj transformaciji, $X' = SXS^\dagger$, jasno je da je

$$\det X' = \det S \det X \det S^\dagger = \det X \; ,$$

odakle je $x'^2 = x^2$.

(ii) Množeći $X = x_\mu \sigma^\mu$ sa $\bar{\sigma}^\nu$ i uzimanjem traga dobija se tražena relacija. Matrice σ_μ zadovoljavaju sledeće relacije ortogonalnosti $\mathrm{tr}[\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu] = 2g^{\mu\nu}$.

1.7 Iz

$$x'^\mu = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\bar{\sigma}^\mu X') = \frac{1}{2}x^\nu \mathrm{tr}(\bar{\sigma}^\mu S \sigma_\nu S^\dagger) = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \; ,$$

sledi tražena relacija.

1.8 Proizvoljna Lorentz-ova transformacija unutar komponente povezane sa jedinicom je $U(\omega)=e^{-\frac{i}{2}M_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}}$, gde su $M_{\mu\nu}$ generatori. Zbog antisimetričnosti parametara $\omega_{\mu\nu}$ postoji šest nezavisnih Lorentz-ovih transformacija: tri rotacije i tri busta. Matrica rotacije oko z ose za ugao θ_3 je

$$\Lambda(\theta_3)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\theta_3&\sin\theta_3&0\\0&-\sin\theta_3&\cos\theta_3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\approx I+\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&\theta_3&0\\0&-\theta_3&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Iz poslednjeg izraza vidi se da je $\omega^1{}_2=-\omega_{12}=\theta_3$. Odgovarajući generator je

$$M_{12}=i\,\frac{d\Lambda(\theta_3)}{d\omega^{12}}\bigg|_{\theta_3=0}=-i\,\frac{d\Lambda(\theta_3)}{d\theta_3}\bigg|_{\theta_3=0}=i\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}. \qquad (1.8\text{-}1)$$

Slično se dobijaju generatori preostale dve rotacije:

$$M_{13}=i\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix},\quad M_{23}=i\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}. \qquad (1.8\text{-}2)$$

U slučaju rotacija veza parametara ω_{ij} i uglova rotacije θ_i oko x_i-ose je $\theta_i=-\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\omega_{jk}$.
Matrica busta duž $x-$ose je

$$\Lambda(\varphi_1)=\begin{pmatrix}\text{ch}\varphi_1&-\text{sh}\varphi_1&0&0\\-\text{sh}\varphi_1&\text{sh}\varphi_1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\approx I+\begin{pmatrix}0&-\varphi_1&0&0\\-\varphi_1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

gde je $\omega^0{}_1=-\varphi_1=-\text{arc th}\,v_1$. Odgovarajući generator je

$$M_{01}=i\,\frac{d\Lambda(\varphi_1)}{d\omega^{01}}\bigg|_{\varphi_1=0}=i\,\frac{d\Lambda(\varphi_1)}{d\varphi_1}\bigg|_{\varphi_1=0}=-i\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}. \qquad (1.8\text{-}3)$$

Slično preostala dva bust–generatora su

$$M_{03}=-i\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\quad M_{02}=-i\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}. \qquad (1.8\text{-}4)$$

Parametri bustova su $\omega_{oi} = -\varphi_i = -\mathrm{arc\,th}\,(v_i)$, gde je v_i brzina kojom se primovani sistem kreće u odnosu na neprimovani duž x_i- te ose.

1.10 Zakon množenja u grupi je

$$(\Lambda_1, a_1)(\Lambda_2, a_2) = (\Lambda_1\Lambda_2, \Lambda_1 a_2 + a_1) \ .$$

Jedinični element je $(I, 0)$, a inverzni $(\Lambda, a)^{-1} = (\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$

1.11 (i) Zadata relacija važi u definicionoj reprezentaciji Poincare-ove grupe, pa važi i u proizvoljnoj reprezentaciji. Iz nje imamo

$$U^{-1}(\Lambda, 0)(1 + i\epsilon^\mu P_\mu)U(\Lambda, 0) = 1 + i(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \epsilon^\nu P_\mu \ . \tag{1.11-1}$$

Iz (1.11-1) je

$$U^{-1}(\Lambda, 0)P_\mu U(\Lambda, 0) = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu P_\nu \ . \tag{1.11-2}$$

Izraz (1.11-2) pokazuje da se pri Lorentz-ovim transformacijama generatori translacija, P_μ transformišu kao komponente četvorovektora. Ako sada u (1.11-2) stavimo $U(\omega, 0) = e^{-\frac{i}{2}M_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}} = 1 - \frac{i}{2}M_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} + o(\omega^2)$ dobijamo

$$(1 + \frac{i}{2}M_{\rho\sigma}\omega^{\rho\sigma})P_\mu(1 - \frac{i}{2}M_{\rho\sigma}\omega^{\rho\sigma}) = (\delta^\alpha_\mu - \omega^\alpha{}_\mu)P_\alpha \ , \tag{1.11-3}$$

odnosno

$$i\omega^{\rho\sigma}(M_{\rho\sigma}P_\mu - P_\mu M_{\rho\sigma}) = -\omega^{\rho\sigma}(g_{\mu\sigma}P_\rho - g_{\mu\rho}P_\sigma) \ . \tag{1.11-4}$$

Na desnoj strani jednačine (1.11-4) izvršili smo antisimetrizaciju po indeksima ρ i σ, da bismo skratili parametre ω. Tako dolazimo do komutatora

$$[M_{\rho\sigma}, P_\mu] = i(g_{\mu\sigma}P_\rho - g_{\mu\rho}P_\sigma) \ . \tag{1.11-5}$$

(ii) Iz zadate relacije proizilazi

$$U^{-1}(\Lambda, 0)M_{\rho\sigma}U(\Lambda, 0) = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\rho(\Lambda^{-1})^\nu{}_\sigma M_{\mu\nu} \ . \tag{1.11-6}$$

Uzećemo da je transformacija Λ infinitezimalna, tj. $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu{}_\nu$. Zamenom u (1.11-6) dolazimo do

$$\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}(g_{\sigma\mu}M_{\rho\nu} - g_{\rho\nu}M_{\mu\sigma} - g_{\sigma\nu}M_{\rho\mu} + g_{\rho\mu}M_{\nu\sigma}) \ ,$$

odnosno

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(g_{\sigma\mu}M_{\nu\rho} + g_{\rho\nu}M_{\mu\sigma} - g_{\rho\mu}M_{\nu\sigma} - g_{\sigma\nu}M_{\mu\rho}) \ . \tag{1.11-7}$$

(iii) Lako se pokazuje da je

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \ . \tag{1.11-8}$$

Relacije (1.11-5), (1.11-7) i (1.11-8) su komutacione relacije Poincare-ove algebre.

1.12 U datoj reprezentaciji generator rotacije oko $z-$ose je

$$M_{12} = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Preostalih pet generatora Lorentz-ove grupe se lako dobijaju iz zadatka 1.8. Generator vremenske translacije je

$$T_0 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Preostala tri translaciona generatora se nalaze slično. Ostavljamo vam za samostalnu vežbu da proverite da ovi generatori zadovoljavaju komutacione relacije Poincare-ove algebre, (1.11-5), (1.11-7) i (1.11-8).

1.13 (i) $W_\mu P^\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}M^{\nu\rho}P^\sigma P^\mu = 0$, jer se radi o proizvodu simetričnog i antisimetričnog tenzora. Iz istog razloga je i $[W_\mu, P_\nu] = 0$.

(ii) Primenom zadatka 1.11 imamo

$$\begin{aligned} W^2 &= \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}M^{\nu\rho}P^\sigma M_{\alpha\beta}P_\gamma \\ &= \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}M^{\nu\rho}\left(M_{\alpha\beta}P^\sigma - i\delta^\sigma_\beta P_\alpha + i\delta^\sigma_\alpha P_\beta\right)P_\gamma \\ &= \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}M^{\nu\rho}M_{\alpha\beta}P^\sigma P_\gamma \ . \end{aligned} \tag{1.13-1}$$

Kontrakcija dva $\epsilon-$simbola u (1.13-1) nađena je u zadatku 1.5 pa je

$$\begin{aligned} W^2 &= -\frac{1}{4}(\delta^\alpha_\nu\delta^\beta_\rho\delta^\gamma_\sigma + \delta^\beta_\nu\delta^\gamma_\rho\delta^\alpha_\sigma + \delta^\gamma_\nu\delta^\alpha_\rho\delta^\beta_\sigma - \delta^\beta_\nu\delta^\alpha_\rho\delta^\gamma_\sigma - \delta^\alpha_\nu\delta^\gamma_\rho\delta^\beta_\sigma - \delta^\gamma_\nu\delta^\beta_\rho\delta^\alpha_\sigma) \\ &\quad M^{\nu\rho}M_{\alpha\beta}P^\sigma P_\gamma \\ &= -\frac{1}{4}\Big(2M^{\nu\rho}M_{\nu\rho}P^2 - M^{\nu\rho}M_{\nu\sigma}P^\sigma P_\rho + M^{\nu\rho}M_{\sigma\nu}P^\sigma P_\rho \\ &\quad + M^{\nu\rho}M_{\rho\sigma}P^\sigma P_\nu - M^{\nu\rho}M_{\sigma\rho}P^\sigma P_\nu) \\ &= -\frac{1}{2}M^{\nu\rho}M_{\nu\rho}P^2 + M^{\nu\rho}M_{\nu\sigma}P^\sigma P_\rho \ . \end{aligned} \tag{1.13-2}$$

(iii) Primenom (ii) dela ovog zadatka imamo

$$[W^2,\ M_{\rho\sigma}] = -\frac{1}{2}[M^{\mu\nu}M_{\mu\nu}P^2,\ M_{\rho\sigma}] + [M_{\mu\alpha}M^{\nu\alpha}P^\mu P_\nu,\ M_{\rho\sigma}]\ . \quad (1.13\text{-}3)$$

Prvi komutator u (1.13-3) obeležićemo sa A a drugi sa B. Razvijajući komutator A i koristeći (1.11-7) dobija se $A = 0$. Komutator B je

$$\begin{aligned} B &= M_{\mu\alpha}M^{\nu\alpha}\left(P^\mu[P_\nu, M_{\rho\sigma}] + [P^\mu, M_{\rho\sigma}]P_\nu\right) \\ &\quad + M_{\mu\alpha}[M^{\nu\alpha}, M_{\rho\sigma}]P^\mu P_\nu + [M_\mu{}^\alpha, M_{\rho\sigma}]M^{\nu\alpha}P^\mu P_\nu\ . \quad (1.13\text{-}4) \end{aligned}$$

Primenom (1.11-5) i (1.11-7) dobija se $B = 0$. Dakle, $[W^2,\ M_{\rho\sigma}] = 0$.

1.14 Primenom zadatka 1.13 (ii) i $P^\mu\,|p^\mu, s, \sigma\rangle = p^\mu\,|p^\mu, s, \sigma\rangle$ dobija se

$$\begin{aligned} W^2\,|\vec{p}=0, m, s, \sigma\rangle &= -m^2\left(\frac{1}{2}M^{\mu\nu}M_{\mu\nu} - M_{0i}M^{0i}\right)|\vec{p}=0, m, s, \sigma\rangle \\ &= -\frac{1}{2}M_{ij}M^{ij}m^2\,|\vec{p}=0, m, s, \sigma\rangle \\ &= -m^2\left((M_{12})^2 + (M_{13})^2 + (M_{23})^2\right)|\vec{p}=0, m, s, \sigma\rangle \\ &= -m^2\vec{J}^2\,|\vec{p}=0, m, s, \sigma\rangle \\ &= -m^2 s(s+1)\,|\vec{p}=0, m, s, \sigma\rangle\ , \end{aligned}$$

jer su $J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M_{jk}$ komponente angularnog momenta.

1.15 (i) W_μ se pri Lorentz-ovom transformacijama transformiše kao vektor pa je

$$U^{-1}(\Lambda)W_\sigma U(\Lambda) = \Lambda_\sigma{}^\alpha W_\alpha\ . \quad (1.15\text{-}1)$$

Iz (1.15-1) imamo

$$\frac{i}{2}[M_{\mu\nu},\ W_\sigma]\omega^{\mu\nu} = \omega^{\mu\nu}g_{\sigma\mu}W_\nu = \frac{1}{2}(g_{\sigma\mu}W_\nu - g_{\sigma\nu}W_\mu)\omega^{\mu\nu}\ ,$$

odakle se dobija tražena relacija.

(ii) Primenom prvog dela ovog zadatka i definicije vektora Pauli-Lubanski-og imamo

$$\begin{aligned} [W_\mu, W_\nu] &= \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}[M^{\alpha\beta}P^\gamma, W_\nu] \\ &= \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\left(M^{\alpha\beta}[P^\gamma, W_\nu] + [M^{\alpha\beta}, W_\nu]P^\gamma\right) \\ &= i\epsilon_{\mu\alpha\nu\gamma}W^\alpha P^\gamma\ . \end{aligned}$$

1.16 (i) Na osnovu zadatka 1.15 (i) dobija se

$$[W_\mu,\ M^2] = -2i(W^\alpha M_{\alpha\mu} + M_{\alpha\mu}W^\alpha)\ .$$

(ii) $[M_{\mu\nu}, W^\mu W^\nu] = 0$. Pazite $\delta^\mu_\mu = 4$.

(iii) Primenom (1.11-5) dobija se $[M^2, P_\mu] = 2i(P^\alpha M_{\alpha\mu} + M_{\alpha\mu}P^\alpha)$. Primetite sličnost dobijenog rezultata i rezultata (i). To je posledica vektorske prirode ova dva vektora.

(iv) 0.

1.17 Zahtev da transformacija $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$ ostavlja invarijantnim standardni impuls, u slučaju $m^2 > 0$, daje

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega_{01} & \omega_{02} & \omega_{03} \\ \omega_{01} & 0 & -\omega_{12} & -\omega_{13} \\ \omega_{02} & \omega_{12} & 0 & -\omega_{23} \\ \omega_{03} & \omega_{13} & \omega_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,$$

odakle se dobija $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_{03} = 0$, $\omega_{ij} \neq 0$. Generatori koji odgovaraju ovim parametrima su M^{12}, M^{13} i M^{23}. To su generatori rotacione podgrupe Lorentz-ove grupe. Dakle u slučaju masenih čestica mala grupa je SO(3) grupa. Mala grupa kvantno mehaničke Lorentz-ove grupe, tj. SL(2, C) grupe, je $\overline{\mathrm{SO}(3)} = \mathrm{SU}(2)$.
U slučaju bezmasenih čestica, analogno imamo

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega_{01} & \omega_{02} & \omega_{03} \\ \omega_{01} & 0 & -\omega_{12} & -\omega_{13} \\ \omega_{02} & \omega_{12} & 0 & -\omega_{23} \\ \omega_{03} & \omega_{13} & \omega_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,$$

odakle je $\omega_{03} = 0$, $\omega_{01} = \omega_{13}$, $\omega_{02} = \omega_{23}$ dok je parametar ω_{12} proizvoljan. On odgovara rotaciji oko $z-$ose. Odgovarajući generator je M_{12}. Zbog navedenih veza između parametara imamo još dva nezavisna generatora $M^{01} + M^{13}$ i $-(M^{02} + M^{23})$. Ako primetimo da je $W_1 = (M^{02} + M^{23})k$, $W_2 = -(M^{01} + M^{13})k$ kao i $W_0 = -M^{12}k$, onda iz zadatka 1.15 (ii) imamo

$$[W_1,\ W_2] = 0,\ [W_0/k,\ W_1] = -iW_2,\ [W_0/k,\ W_2] = iW_1\ .$$

Ovo su komutacione relacije E(2) algebre. Dakle, mala grupa u slučaju bezmasenih čestica je euklidska grupa, E(2) u dve dimenzije.

1.18 Lako se pokazuje da Poincare-ove transformacije zajedno sa dilatacijama i SKT čine grupu. Ova grupa se naziva konformnom grupom simetrije, $C(1, 3)$. U proizvoljnoj reprezentaciji proizvoljan grupni element je

$$U(\omega, \epsilon, \rho, c) = e^{i(P_\mu\epsilon^\mu - \frac{1}{2}M_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} + \rho D + c_\mu K^\mu)}\ ,$$

gde, pored generatora Poincare-ove grupe, imamo i generator dilatacija, D i četiri generatora SKT, K_μ. Konformna grupa je petnaestoparametarska grupa. Komutacione relacije se nalaze na osnovu zakona množenja u grupi. Sa (Λ, a, ρ, c) označićemo proizvoljan element grupe u tzv. definicionoj reprezentaciji. Ako pođemo od

$$(\Lambda^{-1}, 0, 0, 0)(I, 0, 0, c)(\Lambda, 0, 0, 0) = (I, 0, 0, \Lambda^{-1}c)$$

za infinitezimalne SKT dobićemo

$$U^{-1}(\Lambda)K_\rho U(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\rho K_\mu \ ,$$

odakle za infinitezimalne Lorentz-ove transformacije sledi

$$[M_{\mu\nu}, K_\rho] = i(g_{\nu\rho}K_\mu - g_{\mu\rho}K_\nu). \tag{1.18-1}$$

Pokažite zatim da je $U^{-1}(\Lambda, 0, 0, 0)U(I, 0, \rho, 0)U(\Lambda, 0, 0, 0) = U(I, 0, \rho, 0)$, kao i da odavde sledi

$$[M_{\mu\nu},\ D] = 0 \ . \tag{1.18-2}$$

Polazeći od

$$\begin{aligned}
(I,0,\rho,0)^{-1}(I,0,0,c)(I,0,\rho,0)x^\mu &= (I,0,\rho,0)^{-1}(I,0,0,c)e^\rho x^\mu \\
&= (I,0,\rho,0)^{-1}\frac{e^\rho x^\mu + c^\mu e^{2\rho}x^2}{1 + 2(c\cdot x)e^\rho + c^2e^{2\rho}x^2} \\
&= \frac{x^\mu + c^\mu e^\rho x^2}{1 + 2(c\cdot x)e^\rho + c^2e^{2\rho}x^2} \\
&= (I,0,0,e^\rho c)x^\mu \ ,
\end{aligned}$$

dobija se

$$e^{-i\rho D}(1 + iK^\mu c_\mu)e^{i\rho D} = 1 + iK^\mu e^\rho c_\mu \ ,$$

za infinitezimalno male parametre SKT, c_μ. Iz poslednje relacije sledi

$$e^{-i\rho D}K^\mu e^{i\rho D} = e^\rho K^\mu \ .$$

Ova relacija pokazuje kako se generatori SKT transformišu pri dilatacijama. Ako dalje uzmemo da su dilatacije infinitezimalno male dobijamo

$$[D,\ K^\mu] = iK^\mu \ . \tag{1.18-3}$$

Preostale komutacione relacije dobijaju se slično, te ćemo navesti samo rezultate:

$$[P_\mu, D] = iP_\mu \ , \tag{1.18-4}$$

$$[D, D] = 0, \tag{1.18-5}$$

$$[K_\mu,\ K_\nu] = 0, \tag{1.18-6}$$

$$[P_\mu, K_\nu] = -2i(g_{\mu\nu}D - M_{\mu\nu}). \tag{1.18-7}$$

Relacije (1.18-1)–(1.18-7) zajedno sa (1.11-5), (1.11-7) i (1.11-8) su komutacione relacije konformne grupe.

Rešenja 2

Klein-Gordon-ova jednačina

2.1 Partikularno rešenje jednačine

$$(\Box + m^2)\phi(x) = 0 \ , \tag{2.1-1}$$

tražićemo u obliku ravnog talasa,

$$e^{-ikx} = e^{-iEt+i\vec{k}\vec{x}}, \tag{2.1-2}$$

gde su E i $\vec{k}$ vrednosti energije i impulsa ravnog talasa, respektivno. Poslednje se vidi iz $i\frac{\partial}{\partial t}e^{-ikx} = Ee^{-ikx}$ i $-i\nabla e^{-ikx} = \vec{k}e^{-ikx}$. Smenom (2.1-2) u (2.1-1) dobijamo $k^2 = m^2$ tj. $E = \pm\sqrt{\vec{k}^2 + m^2} = \pm\omega_k$. Dakle, ravan talas (2.1-2) jeste partikularno rešenje Klein-Gordon-ove jednačine ako važi prethodna relacija. Za fiksnu vrednost impulsa $\vec{k}$ postoje dva linearno nezavisna ravna talasa $e^{-i\omega_k t+i\vec{k}\vec{x}}$ i $e^{+i\omega_k t+i\vec{k}\vec{x}}$. Opšte rešenje jednačine (2.1-1) je

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}}\left(a(\vec{k})e^{-i(\omega_k t-\vec{k}\vec{x})} + b^\dagger(-\vec{k})e^{i(\omega_k t+\vec{k}\vec{x})}\right) \ , \tag{2.1-3}$$

gde su $a(\vec{k})$ i $b^\dagger(\vec{k})$ koeficijenti. U drugom sabirku u (2.1-3) napravićemo smenu $\vec{k} \to -\vec{k}$, posle koje (2.1-3) prelazi u

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}}\left(a(\vec{k})e^{-ikx} + b^\dagger(\vec{k})e^{ikx}\right) \ , \tag{2.1-4}$$

gde je $k = (\omega_k, \vec{k})$.

2.2 Koristeći (2.1-4) imamo

$$\begin{aligned} Q \ &= \ i\frac{q}{2(2\pi)^3}\int \frac{d^3x d^3k d^3k'}{\sqrt{\omega_k\omega_{k'}}}\Big[\left(a^\dagger(\vec{k})e^{ikx} + b(\vec{k})e^{-ikx}\right) \\ &\quad \left(-i\omega_{k'}a(\vec{k}')e^{-ik'x} + i\omega_{k'}b^\dagger(\vec{k}')e^{ik'x}\right) - \left(a(\vec{k})e^{-ikx} + b^\dagger(\vec{k})e^{ikx}\right) \\ &\quad \left(i\omega_{k'}a^\dagger(\vec{k}')e^{ik'x} - i\omega_{k'}b(\vec{k}')e^{-ik'x}\right)\Big] \, . \end{aligned} \tag{2.2-1}$$

Integracijom po $\vec{x}$ u (2.2-1), dobijamo

$$\begin{aligned} Q \ = \ &-\frac{q}{2}\int d^3k d^3k' \sqrt{\frac{\omega_{k'}}{\omega_k}} \Big(-a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}')e^{i(\omega_k-\omega_{k'})t}\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}') \\ &+a^\dagger(\vec{k})b^\dagger(\vec{k}')e^{i(\omega_k+\omega_{k'})t}\delta^{(3)}(\vec{k}+\vec{k}') - b(\vec{k})a(\vec{k}')e^{-i(\omega_k+\omega_{k'})t}\delta^{(3)}(\vec{k}+\vec{k}') \\ &+b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k}')e^{-i(\omega_k-\omega_{k'})t}\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}') + \text{c.c} \Big) \ . \end{aligned} \quad (2.2\text{-}2)$$

gde c.c označava kompleksnu konjugaciju. Ako u (2.2-2) izvršimo integraciju po $\vec{k}'$ dolazimo do

$$Q = \frac{q}{2}\int d^3k \left(a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}) - b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k}) - b(\vec{k})b^\dagger(\vec{k}) \right) \ . \quad (2.2\text{-}3)$$

U (2.2-3) smo vodili računa o redosledu pisanja koeficijenata. U okviru ove glave to nije neophodno, jer koeficijenti su zapravo kompleksni brojevi, pa je adjungovanje kompleksno konjugovanje. Ovakav zapis će nam biti potreban u 6. glavi ove zbirke, gde će $a(\vec{k})$ i $b^\dagger(\vec{k})$ biti operatori.

2.3 Postupak je sličan kao u prethodnom zadatku. Integracija po $\vec{x}$ daje

$$\begin{aligned} H \ = \ &-\frac{1}{4}\int \frac{d^3kd^3k'}{\sqrt{\omega_k\omega_{k'}}} \Big(a(\vec{k})a(\vec{k}')(\omega_k\omega_{k'} + \vec{k}\vec{k}' - m^2)e^{-i(\omega_k+\omega_{k'})t}\delta^{(3)}(\vec{k}+\vec{k}') \\ &+a^\dagger(\vec{k})a^\dagger(k')(\omega_k\omega_{k'} + \vec{k}\vec{k}' - m^2)e^{i(\omega_k+\omega_{k'})t}\delta^{(3)}(\vec{k}+\vec{k}') \\ &-a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}')(\omega_k\omega_{k'} + \vec{k}\vec{k}' + m^2)e^{-i(\omega_k-\omega_{k'})t}\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}') \\ &-a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}')(\omega_k\omega_{k'} + \vec{k}\vec{k}' + m^2)e^{i(\omega_k-\omega_{k'})t}\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}')\Big) \, . \end{aligned} \quad (2.3\text{-}1)$$

Nakon integracije po $\vec{k}'$ uz korišćenje disperzione relacije, $\vec{k}^2 + m^2 = \omega_k^2$ dolazimo do

$$H = \frac{1}{2}\int d^3k\omega_k \left(a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}) \right) \ . \quad (2.3\text{-}2)$$

2.4 Sličnim postupkom kao u prethodna dva zadatka dobijamo

$$\vec{P} = \int d^3k\vec{k}a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) \ .$$

2.5 Divergencija zadate struje je $\partial_\mu j^\mu = -i(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* + \phi\Box\phi^* - \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* + \phi^*\Box\phi)$. Polja ϕ i ϕ^* zadovoljavaju jednačine kretanja, iz čega sledi da je $\partial_\mu j^\mu = 0$.

2.6 Kao u prethodnom zadatku imamo

$$\begin{aligned} \partial_\mu j^\mu \ = \ &i\left(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* + \phi\Box\phi^* - \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* - \phi^*\Box\phi\right) \\ &-2e(\phi A^\mu\partial_\mu\phi^* + \phi\phi^*\partial_\mu A^\mu + \phi^* A^\mu\partial_\mu\phi). \end{aligned} \quad (2.6\text{-}1)$$

Jednačine kretanja su

$$\left[\Box + ie(\partial_\mu A^\mu + 2A^\mu\partial_\mu + ieA_\mu A^\mu) + m^2\right]\phi^*(x) = 0 \ , \tag{2.6-2}$$

$$\left[\Box - ie(\partial_\mu A^\mu + 2A^\mu\partial_\mu - ieA_\mu A^\mu) + m^2\right]\phi(x) = 0 \ . \tag{2.6-3}$$

Oduzimanjem jednačine (2.6-2) pomnožene sa ϕ i jednačine (2.6-3) pomnožene sa ϕ^* uz (2.6-1), dobijamo $\partial_\mu j^\mu = 0$.

2.7 Jednačina skalarne čestice u elektromagnetnom polju je

$$\left[(\partial_\mu - ieA_\mu)(\partial^\mu - ieA^\mu) + m^2\right]\phi(x) = 0 \ . \tag{2.7-1}$$

U oblasti $r > a$ (2.7-1) postaje

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - ieU_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - ieU_0\right) - \Delta + m^2\right]\phi(x) = 0 \ . \tag{2.7-2}$$

Ako u (2.7-2) stavimo $\phi(x) = e^{-iEt}F(\vec{r})$ dobijamo

$$\left[-(E + eU_0)^2 - \Delta + m^2\right]F(\vec{r}) = 0 \ . \tag{2.7-3}$$

Razdvajanjem promenljivih u talasnoj funkciji, $F = \frac{f(r)}{r}Q(\theta,\varphi)$ iz (2.7-3) dobijamo

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \left[(E + eU_0)^2 - m^2\right]f = -\frac{l(l+1)}{r^2}f \ , \tag{2.7-4}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Q}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Q}{\partial\phi^2} = -l(l+1)Q \ . \tag{2.7-5}$$

Partikularna rešenja jednačine (2.7-5) su sferni harmonici Y_{lm}. U slučaju $l = 0$, odgovarajući sferni harmonik Y_{00} je konstanta. Rešenje jednačine (2.7-4) je

$$f = Ae^{-\kappa r} + Be^{\kappa r}, \tag{2.7-6}$$

gde je

$$\kappa^2 = -[(E + eU_0)^2 - m^2] > 0 \ . \tag{2.7-7}$$

Konstanta B je jednaka 0, jer bi u suprotnom talasna funkcija divergirala u $r = \infty$. U oblasti $r < a$ ($U = 0$) rešenje je

$$f = C\sin(kr) + D\cos(kr) \ , \tag{2.7-8}$$

gde je $k^2 = E^2 - m^2 > 0$. Da talasna funkcija ne bi divergirala u $r = 0$ potrebno je da je $D = 0$. Talasna funkcija je dakle

$$\phi_< = C\frac{\sin kr}{r} \ , \tag{2.7-9}$$

$$\phi_{>} = A\frac{e^{-\kappa r}}{r} \ . \tag{2.7-10}$$

Uslovi neprekidnosti funkcije i njenog prvog izvoda daju

$$C\sin(ka) - Ae^{-\kappa a} = 0 \ , \tag{2.7-11}$$

$$Ck\cos(ka) + \kappa Ae^{-\kappa a} = 0 \ . \tag{2.7-12}$$

Uslov postojanja netrivijalnog rešenja sistema (2.7-11 - 2.7-12) daje transcendentnu jednačinu koja određuje spektar energije

$$\mathrm{tg}(ka) = -\frac{k}{\kappa} \ . \tag{2.7-13}$$

2.8 Talasna jednačina ima oblik

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial}{\partial x} + ieBy\right)^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + m^2\right]\phi(x) = 0 \ . \tag{2.8-1}$$

Kako x i z komponente operatora impulsa, $\hat{p}_x = -i\frac{\partial}{\partial x}$ odnosno $\hat{p}_z = -i\frac{\partial}{\partial z}$ komutiraju sa hamiltonijanom, to rešenje jednačine (2.8-1) tražimo u obliku

$$\phi = e^{-i(Et - k_x x - k_z z)}\varphi(y) \ . \tag{2.8-2}$$

Iz (2.8-1) i (2.8-2) imamo

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - (k_x - eBy)^2 + E^2 - k_z^2 - m^2\right)\varphi(y) = 0 \ . \tag{2.8-3}$$

Nakon smene $\xi = k_x - eBy$, izraz (2.8-3) se svodi na jednačinu linearnog oscilatora čiji je spektar dobro poznat. Tako dolazimo do

$$E_n = \sqrt{m^2 + k_z^2 + (2n+1)eB} \ , \quad n = 0, 1, 2, \dots \ .$$

2.9 U oblasti $z > 0$ (oblast II) jednačina je

$$\left[\Box - e^2U_0^2 - 2ieU_0\frac{\partial}{\partial t} + m^2\right]\phi(x) = 0 \ . \tag{2.9-1}$$

Zamenom $\phi = e^{-iEt+iqz}$ u (2.9-1), dobija se $q = \sqrt{(E + eU_0)^2 - m^2}$, pa je

$$\phi_{II} = Ce^{-iEt+iqz} \ , \tag{2.9-2}$$

gde smo iz fizičkih razloga izostavili reflektovani talas. U oblasti $z < 0$ (oblast I) talasna funkcija je

$$\phi_I = Ae^{-iEt+ipz} + Be^{-iEt-ipz} \,, \tag{2.9-3}$$

gde je $p = \sqrt{E^2 - m^2}$. Prvi sabirak u (2.9-3) je upadni, dok je drugi reflektovani talas. Iz graničnih uslova sledi

$$A = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{q}{p}\right) C, \quad B = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{q}{p}\right) C \,. \tag{2.9-4}$$

Izraz za struju dat je u zadatku 2.5. Koeficijent refleksije je

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \left|\frac{p-q}{p+q}\right|^2 \,,$$

dok je koeficijent transmisije $T = 1 - R$.

2.10 Klein-Gordon-ova jednačina za česticu u Coulomb-ovom potencijalu je

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - ie\frac{Ze}{r}\right)^2 - \Delta + m^2\right]\phi(x) = 0 \,. \tag{2.10-1}$$

Zamenom $\phi = e^{-iEt}R(r)Y(\theta, \varphi)$ u (2.10-1) uz (2.7-5) imamo

$$-\frac{1}{2m}\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rR) + \frac{l(l+1) - Z^2e^4}{2mr^2}R - \frac{Ze^2E}{mr}R = \frac{E^2 - m^2}{2m}R \,.$$

Ova jednačina analogna je sa radijalnom jednačinom vodoniku sličnog atoma. Poređenjem dobijaju se svojstvene energije

$$E_{n_r,l} = m\sqrt{1 - \frac{Z^2e^4}{Z^2e^4 + \left(n_r + \frac{1}{2} + \sqrt{(l+\frac{1}{2})^2 - Z^2e^4}\right)^2}} \,.$$

U nerelativističkom limesu imamo

$$E_n - m = -\frac{mZ^2e^4}{2n^2} - Z^3e^6\frac{m}{n^3}\left(\frac{1}{2l+1} - \frac{3}{8n}\right) \,.$$

2.11 U oba slučaja potrebno je krenuti od Klein-Gordon-ove jednačine u neprimovanom sistemu reference i izvršiti odgovarajuću transformaciju.

(i) Lako se vidi da je $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - v\frac{\partial}{\partial z'}$, $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'}$, $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'}$, $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}$, pa u primovanom sistemu Klein-Gordon-ova jednačina ima oblik

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t'} - v\frac{\partial}{\partial z'}\right)^2 - \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2}{\partial y'^2} - \frac{\partial}{\partial z'^2} + m^2\right]\phi'(x') = 0 \,.$$

(ii) Pri Lorentz-ovim transformacijama Klein-Gordonova jednačina transformiše se kovarijantno.

2.12 Klein-Gordon-ova jednačina u Schrödinger-ovoj formi je

$$i\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\theta\\ \chi\end{pmatrix} = H\begin{pmatrix}\theta\\ \chi\end{pmatrix},$$

gde je hamiltonijan dat sa

$$H = \left[-\frac{\Delta}{2m}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix} + m\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right].$$

2.13 Svojstvena jednakost, $H\phi = E\phi$ u impulsnoj reprezentaciji ima oblik

$$\begin{pmatrix}\frac{\vec{p}^2}{2m}+m & \frac{\vec{p}^2}{2m}\\ -\frac{\vec{p}^2}{2m} & -\frac{\vec{p}^2}{2m}-m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_0\\ \chi_0\end{pmatrix} = E\begin{pmatrix}\theta_0\\ \chi_0\end{pmatrix}\ . \tag{2.13-1}$$

Svojstvene vrednosti su $E = \pm\omega_p = \pm\sqrt{\vec{p}^2+m^2}$. Za $E = \omega_p$ iz druge jednačine sistema (2.13-1) imamo

$$\chi_0 = -\frac{\frac{\vec{p}^2}{2m}}{\frac{\vec{p}^2}{2m}+m+\sqrt{\vec{p}^2+m^2}}\theta_0 \approx -\frac{\vec{p}^2}{4m^2}\theta_0\ . \tag{2.13-2}$$

Iz (2.13-2) vidimo da je za pozitivno frekventna rešenja $\chi_0 \ll \theta_0$, zbog čega se χ naziva malom komponentom. Zamenom (2.13-2) u prvu jednačinu sistema (2.13-1) dobijamo

$$T\theta_0 = \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{\vec{p}^4}{8m^2}\right)\theta_0\ , \tag{2.13-3}$$

gde je $T = E - m$ kinetička energija čestice. Iz jednačina (2.13-3) vidimo da je prva relativistička popravka hamiltonijana $-\frac{\nabla^4}{8m^2}$.

2.14 Operator brzine je

$$\vec{v} = \frac{\partial H}{\partial\vec{p}} = \frac{\vec{p}}{m}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\ .$$

Svojstvene vrednosti operatora brzine su nule.

2.15 Pokazati da je $(\psi^\dagger, H\psi) = (H\psi^\dagger, \psi)$. Očekivana vrednost je $\langle\vec{v}\rangle = \frac{\vec{p}}{m}$.

γ-matrice

3.1 (i) Pokazati da je izraz tačan u Dirac-ovoj reprezentaciji gama matrica, a zatim preći unitarnom transformacijom na proizvoljnu reprezentaciju.

(ii) Neposrednim adjungovanjem se dobija

$$\begin{aligned}\sigma^{\dagger}_{\mu\nu} &= -\frac{i}{2}(\gamma^{\dagger}_{\nu}\gamma^{\dagger}_{\mu} - \gamma^{\dagger}_{\mu}\gamma^{\dagger}_{\nu}) \\ &= -\frac{i}{2}\gamma_0(\gamma_\nu\gamma_\mu - \gamma_\mu\gamma_\nu)\gamma_0 \\ &= \gamma_0\sigma_{\mu\nu}\gamma_0,\end{aligned}$$

gde smo iskoristili prethodni deo ovog zadatka.

(iii) Slično kao i u prethodnom delu zadatka je:

$$\begin{aligned}(\gamma_5\gamma_\mu)^{\dagger} &= \gamma^{\dagger}_{\mu}\gamma^{\dagger}_{5} \\ &= \gamma_0\gamma_\mu\gamma^0\gamma_5 \\ &= \gamma^0\gamma_5\gamma_\mu\gamma^0.\end{aligned}$$

3.2 (i) Adjungovanjem γ_5 matrice dobija se

$$\begin{aligned}\gamma^{\dagger}_{5} &= i\gamma^{\dagger}_{3}\gamma^{\dagger}_{2}\gamma^{\dagger}_{1}\gamma^{\dagger}_{0} \\ &= i\gamma_0\gamma_3\gamma_0\gamma_0\gamma_2\gamma_0\gamma_0\gamma_1\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0 \\ &= i\gamma_0\gamma_3\gamma_2\gamma_1 \\ &= -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \gamma_5\end{aligned}$$

Osobina $\gamma_5^{-1} = \gamma_5$ lako se pokazuje koristeći $\gamma_0^{-1} = \gamma_0$ i $\gamma_i^{-1} = -\gamma_i = \gamma^i$. Poslednje sledi iz antikomutacionih relacija $\{\gamma_\mu, \gamma^\nu\} = 2\delta^{\nu}_{\mu}$.

(ii) Primenom definicije $\epsilon-$ simbola imamo

$$\begin{aligned}-\frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma &= \frac{i}{4!}(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 - \gamma^0\gamma^1\gamma^3\gamma^2 + ... + \gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0) \\ &= i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma_5.\end{aligned}$$

3.3 (i) Proverava se neposredno po komponentama.

(ii) Pokazuje se neposrednim računom

$$
\begin{aligned}
[\sigma_{\mu\nu}, \gamma_5] &= \frac{i}{2}[\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu, \gamma_5] \\
&= \frac{i}{2}\Big(\gamma_\mu\{\gamma_\nu, \gamma_5\} - \{\gamma_\mu, \gamma_5\}\gamma_\nu - \gamma_\nu\{\gamma_\mu, \gamma_5\} + \{\gamma_\mu, \gamma_5\}\gamma_\nu\Big) = 0.
\end{aligned}
$$

3.4 $\not a \not a = a^\mu a^\nu \gamma_\mu\gamma_\nu = \frac{1}{2}a^\mu a^\nu(\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu) = g^{\mu\nu}a_\mu a_\nu = a^2$

3.5 (i) Traženi identitet direktno sledi iz $\{\gamma_\mu, \gamma^\mu\} = 2\gamma_\mu\gamma^\mu = 2\delta^\mu_\mu = 8$.

(ii) $\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\mu = (2g_{\mu\nu} - \gamma_\nu\gamma_\mu)\gamma^\mu = 2\gamma_\nu - 4\gamma_\nu = -2\gamma_\nu$.

(iii) $\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu = (2g_{\mu\alpha} - \gamma_\alpha\gamma_\mu)\gamma^\beta\gamma^\mu = 2\gamma^\beta\gamma_\alpha + 2\gamma_\alpha\gamma^\beta = 4\delta^\beta_\alpha$, gde smo u poslednjem koraku iskoristili (ii) deo ovog zadatka.

(iv) Prvo prokomutirati matrice γ_μ i γ^α a zatim iskoristiti (iii) deo ovog zadatka.

(v) Primenjujući definiciju $\sigma_{\mu\nu}-$matrica imamo

$$
\sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\nu\gamma_\mu - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma_\nu\gamma_\mu).
$$

Ako sada iskoristimo (i) i (ii) deo ovog zadatka dolazimo do $\sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} = 12$.

(vi) Koristiti zadatak 3.3 (i) i (ii) deo ovog zadatka.

(vii) Izračunajmo

$$
\begin{aligned}
\sigma_{\alpha\beta}\gamma_\mu\sigma^{\alpha\beta} &= -\frac{1}{4}(\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\beta - \gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma_\mu\gamma_\beta\gamma_\alpha \\
&\quad -\gamma^\beta\gamma^\alpha\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\beta + \gamma^\beta\gamma^\alpha\gamma_\mu\gamma_\beta\gamma_\alpha) \\
&= -\frac{1}{4}(4\delta^\beta_\mu\gamma_\beta - 4\gamma_\mu - 4\gamma_\mu + 4g_{\mu\alpha}\gamma^\beta) = 0.
\end{aligned}
$$

(viii) Slično kao u prethodnom delu zadatka imamo

$$
\begin{aligned}
\sigma^{\alpha\beta}\sigma^{\mu\nu}\sigma_{\alpha\beta} &= -\frac{i}{8}(\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\alpha\gamma_\beta - \gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\beta\gamma_\alpha \\
&\quad -\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma_\alpha\gamma_\beta + \gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma_\beta\gamma_\alpha - \gamma^\beta\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\alpha\gamma_\beta \\
&\quad +\gamma^\beta\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\beta\gamma_\alpha + \gamma^\beta\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma_\alpha\gamma_\beta - \gamma^\beta\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma_\beta\gamma_\alpha) \\
&= -\frac{i}{8}(-8\gamma^\nu\gamma^\mu - 16g^{\mu\nu} + 8\gamma^\mu\gamma^\nu \\
&\quad +16g^{\mu\nu} - 16g^{\mu\nu} - 8\gamma^\nu\gamma^\mu + 8\gamma^\mu\gamma^\nu) \\
&= -2i(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) = -4\sigma^{\mu\nu}.
\end{aligned}
$$

(ix) Koristiti (vii) deo ovog zadatka.

(x) Ovde je

$$\begin{aligned}\sigma_{\mu\nu}\gamma_5\sigma^{\mu\nu} &= -\frac{1}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_5\gamma^\nu\gamma^\mu \\ &\quad -\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_5\gamma^\nu\gamma^\mu) \\ &= -\frac{1}{4}\gamma_5(-8-16-16-8) = 12\gamma_5.\end{aligned}$$

3.6 (i) Primenom 3.3 (i) i osobinom da matrice pod tragom mogu ciklično da se rotiraju, tj. $\mathrm{tr}(A_1A_2...A_n) = \mathrm{tr}(A_2A_3...A_nA_1)$ sledi

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\gamma_\mu) &= \mathrm{tr}(\gamma_\mu\gamma_5\gamma_5) \\ &= -\mathrm{tr}(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_5) \\ &= -\mathrm{tr}(\gamma_5^2\gamma_\mu) \\ &= -\mathrm{tr}(\gamma_\mu)\ ,\end{aligned}$$

odakle sledi da je $\mathrm{tr}(\gamma_\mu) = 0$.

(ii) Uzimajući trag od $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}$ dobija se traženi rezultat.

(iii) Koristeći osnovne antikomutacione relacije (3.A) imamo

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma) &= \mathrm{tr}\left[(2g_{\mu\nu} - \gamma_\nu\gamma_\mu)\gamma_\rho\gamma_\sigma\right] \\ &= 2g_{\mu\nu}\mathrm{tr}(\gamma_\rho\gamma_\sigma) - \mathrm{tr}[\gamma_\nu(2g_{\mu\rho} - \gamma_\rho\gamma_\mu)\gamma_\sigma] \\ &= 2g_{\mu\nu}\mathrm{tr}(\gamma_\rho\gamma_\sigma) - 2g_{\mu\rho}\mathrm{tr}(\gamma_\nu\gamma_\sigma) + 2g_{\mu\sigma}\mathrm{tr}(\gamma_\nu\gamma_\rho) \\ &\quad - \mathrm{tr}(\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\mu)\ .\end{aligned}$$

Ako sada iskoristimo rezultat iz prethodnog dela ovog zadatka, i činjenicu da je $\mathrm{tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma) = \mathrm{tr}(\gamma_\sigma\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\mu)$ dobićemo traženi rezultat.

(iv) $\mathrm{tr}\gamma_5 = \mathrm{tr}(\gamma_5\gamma_0\gamma_0) = -\mathrm{tr}(\gamma_0\gamma_5\gamma_0)$, gde smo iskoristili identitet iz 3.3 (i). Koristeći invarijantnost traga na cikličnu izmenu matrica imamo

$$\mathrm{tr}\gamma_5 = -\mathrm{tr}(\gamma_0\gamma_0\gamma_5) = -\mathrm{tr}\gamma_5,$$

odakle je $\mathrm{tr}\gamma_5 = 0$.

(v) $\mathrm{tr}(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma)$ je antisimetričan tenzor po indeksima $\mu,\ \nu,\ \rho,\ \sigma$. Konstanta proporcionalnosti se određuje ako npr. uzmemo $\mu = 0,\ \nu = 1,\ \rho = 2,\ \sigma = 3$.

(vi) Ubacićemo pogodno izabranu jedinicu

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\not{a}_1 \dots \not{a}_{2n+1}) &= \mathrm{tr}(\gamma_5\gamma_5\not{a}_1\cdots\not{a}_{2n+1}) \\ &= (-1)^{2n+1}\mathrm{tr}(\gamma_5\not{a}_1\cdots\not{a}_{2n+1}\gamma_5) \\ &= -\mathrm{tr}(\gamma_5\gamma_5\not{a}_1\cdots\not{a}_{2n+1})\end{aligned}$$

$$= \quad -\mathrm{tr}(\not{a}_1 ... \not{a}_{2n+1}) \ ,$$

odakle sledi traženi rezultat.

(vii) $\mathrm{tr}(\not{a}_1 \cdots \not{a}_{2n}) = \mathrm{tr}(C\not{a}_1 C^{-1} C \cdots C^{-1} C \not{a}_{2n} C^{-1})$, gde je C matrica konjugacije naboja, definisana sa $C\gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T$. Dalje je $\mathrm{tr}(\not{a}_1 \cdots \not{a}_{2n}) = (-1)^{2n}\mathrm{tr}(\not{a}_1^T \cdots \not{a}_{2n}^T) = \mathrm{tr}(\not{a}_{2n} \cdots \not{a}_1)$.

3.7

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}(\not{a}_1 \not{a}_2 \cdots \not{a}_6) = \\
&4\Big\{(a_1 \cdot a_2)\Big[(a_3 \cdot a_4)(a_5 \cdot a_6) - (a_3 \cdot a_5)(a_4 \cdot a_6) + (a_3 \cdot a_6)(a_3 \cdot a_5)\Big] \\
&-(a_1 \cdot a_3)\Big[(a_2 \cdot a_4)(a_5 \cdot a_6) - (a_2 \cdot a_5)(a_4 \cdot a_6) + (a_2 \cdot a_6)(a_4 \cdot a_5)\Big] \\
&+(a_1 \cdot a_4)\Big[(a_2 \cdot a_3)(a_5 \cdot a_6) - (a_2 \cdot a_5)(a_3 \cdot a_6) + (a_2 \cdot a_6)(a_3 \cdot a_5)\Big] \\
&-(a_1 \cdot a_5)\Big[(a_2 \cdot a_3)(a_4 \cdot a_6) - (a_2 \cdot a_4)(a_3 \cdot a_6) + (a_2 \cdot a_6)(a_3 \cdot a_4)\Big] \\
&-(a_1 \cdot a_6)\Big[(a_2 \cdot a_3)(a_4 \cdot a_5) - (a_2 \cdot a_4)(a_3 \cdot a_5) + (a_2 \cdot a_5)(a_3 \cdot a_4)\Big]\Big\}
\end{aligned}$$

3.8 $4\left[p_\mu q_\nu - (p \cdot q) g_{\mu\nu} + p_\nu q_\mu + i\epsilon_{\alpha\mu\beta\nu} p^\alpha q^\beta - m^2 g_{\mu\nu}\right]$

3.9 $-2\not{p} - 2\gamma_5 \not{p} - 4m - 4m\gamma_5$

3.10 Razvojem eksonencijalne funkcije u red imamo

$$e^{\gamma_5 \not{a}} = 1 + (\gamma_5 \not{a}) + \frac{1}{2}(\gamma_5 \not{a})^2 + \frac{1}{3!}(\gamma_5 \not{a})^3 + \cdots . \tag{3.10-1}$$

Sa druge strane je $(\gamma_5 \not{a})^2 = -a^2$, $(\gamma_5 \not{a})^3 = -a^2(\gamma_5 \not{a}), \ldots$ što smenom u (3.10-1) daje

$$\begin{aligned}
e^{\gamma_5 \not{a}} &= (1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} + \cdots) + (\gamma_5 \not{a})(1 - \frac{a^2}{3!} + \frac{a^4}{5!} - \cdots) \\
&= \cos(\sqrt{a^2}) + \frac{1}{\sqrt{a^2}} \sin(\sqrt{a^2}) \gamma_5 \not{a},
\end{aligned}$$

gde je $a^2 = a_\mu a^\mu$.

3.11 Da je proizvod bilo koje dve Γ matrice ponovo Γ matrica (do na $\pm 1, \pm i$) proverava se direktno. Npr. $\gamma_5 \sigma_{01} = -i\sigma_{23}$.
Sada ćemo pokazati linearnu nezavisnost Γ matrica. Ako izraz $\sum_a c_a \Gamma^a = 0$ pomnožimo sa matricom $\Gamma_b = (\Gamma^b)^{-1}$ dobićemo

$$c_b \Gamma_b \Gamma^b + \sum_{a \neq b} c_a \Gamma^a \Gamma_b = 0.$$

Na osnovu leme o preuređenju poslednji izraz prelazi u

$$c_b I + \sum_{a\neq b} \eta_{abc} c_a \Gamma^c = 0 \ ,$$

gde je $\eta_{abc} = \pm 1, \pm i$. Koristeći ponovo lemu o preuređenju imamo da je $\Gamma_c \neq I$. Uzimanjem traga prethodnog izraza imamo $c_b = 0$ $(\forall b)$, što znači da je skup matrica linearno nezavisan.

3.12 Ako izraz $A = \sum_a c_a \Gamma^a$ pomnožimo sa desne strane matricom Γ_b i izdvojimo $b-$ti član u sumi dobićemo

$$A\Gamma_b = c_b \Gamma^b \Gamma_b + \sum_{a\neq b} c_a \Gamma^a \Gamma_b = c_b + \sum_{a\neq b} c_a \eta_{acb} \Gamma^c.$$

Uzimanjem traga poslednje relacije uz primenu

$$\mathrm{tr}(\Gamma^a) = \begin{cases} 0, & \Gamma^a \neq I \\ 4, & \Gamma^a = I \end{cases} ,$$

dobija se tražena relacija.

3.13 Koeficijenti u razvoju zadatih proizvoda po potpunom skupu Γ matrica računaju se po formuli iz prethodnog zadatka:

(i) $\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho = (g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho} g_{\sigma\nu} + g_{\mu\sigma} g_{\rho\nu}) \gamma^\sigma + i\epsilon_{\sigma\mu\nu\rho} \gamma_5 \gamma^\sigma$,

(ii) $\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu = g_{\mu\nu} \gamma_5 + \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} \sigma_{\alpha\beta}$,

(iii) $\sigma_{\mu\nu} \gamma_\rho \gamma_5 = \epsilon_{\alpha\mu\nu\rho} \gamma^\alpha - i g_{\nu\rho} \gamma_5 \gamma_\mu + i g_{\mu\rho} \gamma_5 \gamma_\nu$.

3.14 Na osnovu zadatka 3.13 (i) dobija se $\{\gamma_\mu, \sigma_{\nu\rho}\} = 2\epsilon_{\alpha\mu\nu\rho} \gamma^5 \gamma^\alpha$.

3.15 Primenom 3.13 (i) dati trag se transformiše u

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_5) &= (g_{\mu\nu} g_{\rho\delta} - g_{\mu\rho} g_{\nu\delta} + g_{\mu\delta} g_{\rho\nu}) \mathrm{tr}(\gamma^\delta \gamma_\sigma \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_5) \\ &+ i\epsilon_{\delta\mu\nu\rho} \mathrm{tr}(\gamma^\delta \gamma_\sigma \gamma_\alpha \gamma_\beta) \ . \end{aligned}$$

Primenom 3.6 (iii) i (v) dobijamo

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_5) &= 4i(-g_{\mu\nu} \epsilon_{\rho\sigma\alpha\beta} + g_{\mu\rho} \epsilon_{\nu\sigma\alpha\beta} \\ &- g_{\rho\nu} \epsilon_{\mu\sigma\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} \epsilon_{\sigma\mu\nu\rho} - g_{\sigma\beta} \epsilon_{\alpha\mu\nu\rho} + g_{\sigma\alpha} \epsilon_{\beta\mu\nu\rho}) \ . \end{aligned}$$

3.16 Traženi izraz pokazuje se primenom zadatka 3.13 (ii).

3.17 Primenom $[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B$ i antikomutacionih relacija između γ_μ matrica dobija se

$$[\gamma_\mu \gamma_\nu, \ \gamma_\rho \gamma_\sigma] = 2g_{\nu\rho} \gamma_\mu \gamma_\sigma - 2g_{\nu\sigma} \gamma_\mu \gamma_\rho - 2g_{\mu\sigma} \gamma_\rho \gamma_\nu + 2g_{\mu\rho} \gamma_\sigma \gamma_\nu \ ,$$

odakle je

$$[\sigma_{\mu\nu}, \ \sigma_{\rho\sigma}] = 2i(g_{\nu\rho} \sigma_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma} \sigma_{\nu\rho} - g_{\mu\rho} \sigma_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma} \sigma_{\mu\rho}) \ .$$

Operatori $\frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu}$ su generatori Poincare-ove grupe u spinorskoj reprezentaciji.

3.18 Neka je M matrica koja komutira sa svim γ_μ matricama. Na osnovu zadatka 3.11 imamo ($\Gamma^b \neq I$)

$$M = c_b\Gamma^b + \sum_{a\neq b} c_a\Gamma^a \ . \tag{3.18-1}$$

Množeći (3.18-1) matricom Γ^d sa leva, odnosno Γ_d sa desna, koja antikomutira sa Γ^b (takva uvek postoji jer je $\Gamma^b \neq$ I) dobijamo

$$\Gamma_d M\Gamma^d = -c_b\Gamma^b + \sum_{a\neq b} \eta c_a\Gamma^a \ . \tag{3.18-2}$$

Pošto matrica M komutira sa γ_μ a samim tim i sa svim Γ^a matricama sledi

$$M = -c_b\Gamma^b + \sum_{a\neq b} \eta c_a\Gamma^a \ . \tag{3.18-3}$$

Ako sada (3.18-1) i (3.18-3) pomnožimo sa Γ_b i uzmemo trag dobijenih izraza dobija se da je $c_b = 0$. Dakle, svi koeficijenti u razvoju (3.18-1) su nula osim koeficijenta ispred jedinične matrice.

3.19 Primenom Baker-Hausdorff-ove formule

$$e^B A e^{-B} = A + [B,A] + \frac{1}{2!}[B,[B,A]] + \cdots$$

imamo

$$U\vec{\alpha}U^\dagger = \vec{\alpha} + 2\beta\vec{n} - 2(\vec{n}\vec{\alpha})\vec{n} - \frac{8}{3!}\beta\vec{n} + \cdots \ , \tag{3.19-1}$$

jer je $[\beta\vec{\alpha}\vec{n},\alpha^i] = n^j(\beta\{\alpha^j,\alpha^i\} - \{\beta,\alpha^i\}\alpha^j) = 2\beta n^i$ itd.
Sa druge strane je $(\beta\vec{\alpha}\vec{n})^2 = -1$, $(\beta\vec{\alpha}\vec{n})^3 = -(\beta\vec{\alpha}\vec{n})$, $(\beta\vec{\alpha}\vec{n})^4 = 1, \ldots$ pa je

$$\vec{\alpha} + (U^2 - I)(\vec{\alpha}\vec{n})\vec{n} = \vec{\alpha} + 2\beta\vec{n} - 2(\vec{\alpha}\vec{n})\vec{n} - \frac{8}{3!}\beta\vec{n} + \cdots \tag{3.19-2}$$

Jasno je da su izrazi (3.19-1) i (3.19-2) jednaki, čime je dokaz završen.

3.20 Da bi se dokazalo da se radi o skupu γ_μ matrica potrebno je pokazati da one zadovoljavaju algebru $\{\gamma_\mu,\gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}$, što je jednostavno. Veza sa Dirac-ovom reprezentacijom γ_μ^{D} je data preko matrice S

$$\gamma_\mu S = S\gamma_\mu^{\mathrm{D}} \ . \tag{3.20-1}$$

Ako uzmemo $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, gde su a, b, c, d kvadratne matrice formata 2×2, iz (3.20-1) dobijamo

$$\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sigma^i c & \sigma^i d \\ -\sigma^i a & -\sigma^i b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b\sigma^i & a\sigma^i \\ -d\sigma^i & c\sigma^i \end{pmatrix} \ . \tag{3.20-2}$$

Rešenje (3.20-2) je $a = -b = c = d = \mathrm{I}$. Jedno rešenje za matricu S je

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathrm{I} & -\mathrm{I} \\ \mathrm{I} & \mathrm{I} \end{pmatrix} .$$

Matrice $\sigma_{\mu\nu}$ su

$$\sigma_{oi} = -i \begin{pmatrix} -\sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}, \quad \sigma_{ij} = \epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} , \tag{3.20-3}$$

dok je

$$\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & -\mathrm{I} \end{pmatrix} ,. \tag{3.20-4}$$

Dirac-ova jednačina

4.1 Kako je $H_D = \vec{\alpha}\vec{p} + \beta m$ to je:

(i) $[H_D, \vec{p}\,] = 0$,

(ii) $[H_D, L^i] = \epsilon^{ijk}[\vec{\alpha}\vec{p} + \beta m, x^j p^k] = \epsilon^{ijk}\alpha^l [p^l, x^j]p^k = -i\epsilon^{ilk}\alpha^l p^k = i(\vec{p}\times\vec{\alpha})^i$,

(iii) $[H_D, \vec{L}^2] = -i\epsilon^{ijk}\alpha^j(l^i p^k + p^k l^i) \neq 0$,

(iv) $[H_D, S^i] = -\frac{i}{4}[H_D, \epsilon^{ijk}\alpha^j\alpha^k] = -i\epsilon^{ijk}p^k\alpha^j$,

(v) Na osnovu rezultata (ii) i (iv) ovaj komutator je jednak nuli,

(vi) $[H_D, \vec{J}^2] = 0$,

(vii) Na osnovu (iv) imamo $[H_D, \vec{\Sigma}\hat{p}] = -i\frac{1}{2|\vec{p}|}\epsilon^{ijk}p^j\alpha^k p^i = 0$,

(viii) Ovaj komutator je različit od nule sem ako vektori $\vec{n}$ i $\vec{p}$ nisu kolinearni.

4.2 Rešenje Dirac-ove jednačine

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0\ , \tag{4.2-1}$$

tražićemo u obliku ravnih talasa,

$$\psi = \begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} e^{-ipx}\ . \tag{4.2-2}$$

Smenom (4.2-2) u (4.2-1) (u Dirac-ovoj reprezentaciji γ matrica) imamo

$$\begin{pmatrix} E-m & -\vec{\sigma}\vec{p}\\ \vec{\sigma}\vec{p} & -E-m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} = 0\ , \tag{4.2-3}$$

gde su E i $\vec{p}$ energija i impuls čestice, respektivno. Da bi homogen sistem jednačina (4.2-3) imao netrivijalna rešenja potrebno je (a i dovoljno) da mu je determinanta jednaka nuli. To nas vodi ka uslovu $E = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} = \pm E_p$, iz

koga vidimo da kao i u slučaju Klein-Gordon-ove jednačine postoje pozitivno i negativno frekventna rešenja.
Za pozitivno frekventna rešenja, $E = E_p$ sistem (4.2-3) se svodi na

$$\begin{aligned}(E_p - m)\varphi - \vec{\sigma}\vec{p}\chi &= 0 , \\ \vec{\sigma}\vec{p}\varphi - (E_p + m)\chi &= 0 ,\end{aligned} \tag{4.2-4}$$

odakle je

$$\chi = \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E_p + m}\varphi . \tag{4.2-5}$$

Dakle,

$$u(E_p, \vec{p}) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E_p+m}\varphi \end{pmatrix} , \tag{4.2-6}$$

gde je φ neodređeno. U slučaju negativno frekventnih rešenja, $E = -E_p$, rešenje sistema (4.2-3) je

$$u(-E_p, \vec{p}) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E_p+m}\chi \\ \chi \end{pmatrix} . \tag{4.2-7}$$

Ako sada definišemo $v(\vec{p}) = u(-E_p, -\vec{p})$ i $u(\vec{p}) = u(E_p, \vec{p})$, linearno nezavisna rešenja jednačine (4.2-1), za fiksno $\vec{p}$, su

$$u(\vec{p})e^{-ip\cdot x}, \quad v(\vec{p})e^{ip\cdot x},$$

gde je $p^\mu = (E_p, \vec{p})$. Primetite da smo u slučaju negativno frekventnih rešenja promenili znak impulsu $\vec{p}$. Linearno nezavisna rešenja data gore odgovaraju čestici energije E_p i impulsa $\vec{p}$ odnosno $-E_p$ i $-\vec{p}$. Da bismo odredili preostale stepene slobode φ odnosno χ u bispinorima u i v potrebno je da nađemo opservablu koja komutira sa Dirac-ovim hamiltonijanom. Operator heliciteta, $\frac{1}{2}\vec{\Sigma}\hat{p}$, gde je $\hat{p} = \vec{p}/|\vec{p}|$, je takav operator (zadatak 4.1 (vii)). Iz svojstvene jednačine $\vec{\sigma}\hat{p}\varphi = \pm\varphi$ i analogne relacije za χ dobijamo

$$\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2(1+\hat{p}_3)}}\begin{pmatrix} \hat{p}_3 + 1 \\ \hat{p}_1 + i\hat{p}_2 \end{pmatrix} \quad \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2(1+\hat{p}_3)}}\begin{pmatrix} -\hat{p}_1 + i\hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 + 1 \end{pmatrix} \tag{4.2-8}$$

i slično za χ_r $(r = 1, 2)$. Ako se specijalno izabere da je $\vec{p} = p\vec{e}_z$ tada bazni spinori postaju

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Za bazne bispinore se dobija

$$\begin{aligned} u_1(\vec{p}) &= \mathcal{N}_p \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E_p+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad u_2(\vec{p}) = \mathcal{N}_p \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E_p+m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \\ v_1(\vec{p}) &= \mathcal{N}_p \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E_p+m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad v_2(\vec{p}) = \mathcal{N}_p \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E_p+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{4.2-9}$$

gde je $\mathcal{N}_p = \sqrt{\frac{E_p+m}{2m}}$ normalizacioni faktor. Ne zaboravite da je $\vec{p} = p\vec{e_z}$ tj. da je $\vec{p}\vec{\sigma} = p\sigma_3$. Samo tada bispinori (4.2-9) čine helicitetni bazis. U slučaju proizvoljnog impulsa $\vec{p}$ za nerelativističke spinore treba da uzmemo (4.2-8), da bi dobili helicitetni bazis. Mada, (4.2-9) predstavlja bazisne bispinore i za proizvoljan impuls, samo što se tada ne radi o helicitetnom bazisu. Bispinori u i v su normirani prema (4.D) i oni čine bazne bispinore za fiksnu vrednost impulsa $\vec{p}$. Opšte rešenje jednačine (4.2-1) je

$$\psi = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sum_{r=1}^{2} \int d^3p \sqrt{\frac{m}{E_p}} \left(u_r(\vec{p}) c_r(\vec{p}) e^{-ipx} + v_r(\vec{p}) d_r^\dagger(\vec{p}) e^{ipx} \right) . \tag{4.2-10}$$

Termin bispinor potiče otud što se ψ sastoji od dva SL(2, C) spinora. U kiralnoj reprezentaciji se jasnije vidi da se Dirac-ov spinor (tj. bispinor) transformiše po $(1/2, 0)\oplus(0, 1/2)$ reducibilnoj reprezentaciji kvantne Lorentz-ove grupe (tj. SL(2, C) grupe koja je natkrivajuća grupa za Lorentz-ovu grupu).

4.3 Stanja $u(\vec{p}, s), v(\vec{p}, s)$ su svojstvena stanja operatora energije $i\frac{\partial}{\partial t}$ sa svojstvenim vrednostima E_p odnosno $-E_p$, respektivno.

4.4 Koristeći izraze za bazne spinore iz zadatka 4.2 imamo

$$\sum_r u_r(\vec{p})\bar{u}_r(\vec{p}) = \frac{E_p+m}{2m} \begin{pmatrix} \varphi_1\varphi_1^\dagger + \varphi_2\varphi_2^\dagger & -(\varphi_1\varphi_1^\dagger + \varphi_2\varphi_2^\dagger)\frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E_p+m} \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E_p+m}(\varphi_1\varphi_1^\dagger + \varphi_2\varphi_2^\dagger) & -\frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E_p+m}(\varphi_1\varphi_1^\dagger + \varphi_2\varphi_2^\dagger)\frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E_p+m} \end{pmatrix}$$

gde su φ_r nerelativistički spinori $r = \{1, 2\}$. Koristeći relaciju komletnosti, $\varphi_1\varphi_1^\dagger + \varphi_2\varphi_2^\dagger = \mathrm{I}$ i $(\vec{p}\vec{\sigma})^2 = \vec{p}^2 = E_p^2 - m^2$ imamo

$$\sum_{r=1}^{2} u_r(\vec{p})\bar{u}_r(\vec{p}) = \frac{1}{2m} \begin{pmatrix} E_p + m & -\vec{\sigma}\vec{p} \\ \vec{\sigma}\vec{p} & -E_p + m \end{pmatrix},$$

što je $\frac{\not{p}+m}{2m}$. Druga jednakost se pokazuje analogno.

4.5 Direktnom primenom izraza za projektore iz zadatka 4.4 imamo $\Lambda_+^2 = \frac{1}{4m^2}(\not{p}^2 + 2m\not{p} + m^2) = \Lambda_+$, gde smo iskoristili $\not{p}^2 = p^2 = m^2$ (zadatak 4.4). Slično se pokazuje i da je $\Lambda_-^2 = \Lambda_-$. Ortogonalnost projektora sledi iz $(\not{p}+m)(\not{p}-m) = p^2 - m^2 = 0$.
Dejstvo projektora na spinore se dokazuje koristeći Dirac-ove jednačine u impulsnom prostoru, (4.C). Naime,

$$\Lambda_+ u_r(\vec{p}) = \frac{1}{2m}(\not{p} + m)u_r(\vec{p}) = \frac{1}{2m}(m + m)u_r(\vec{p}) = u_r(\vec{p})$$

$$\Lambda_+ v_r(\vec{p}) = \frac{1}{2m}(\not{p} - m)u_r(\vec{p}) = \frac{1}{2m}(-m + m)u_r(\vec{p}) = 0 \ .$$

Slično se pokazuje i $\Lambda_- u_r(\vec{p}) = 0, \ \Lambda_+ v_r(\vec{p}) = v_r(\vec{p})$. U konkretnoj reprezentaciji bispinora rezultat se lako proverava neposrednim računom.

4.6 (i) Najlakše je traženu osobinu proveriti po komponentama. Npr. za $x-$komponentu imamo $\Sigma^1 = i\gamma^2\gamma^3$, dok je $\gamma_5\gamma_0\gamma^1 = i\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma^1 = i\gamma^2\gamma^3$. Slično se proverava za preostale dve komponente.

(ii) Po definiciji imamo

$$\begin{aligned} [\Sigma^i, \Sigma^j] &= -\frac{1}{4}\epsilon^{ilm}\epsilon^{jpq}[\gamma^l\gamma^m, \gamma^p\gamma^q] \\ &= -\frac{1}{4}\epsilon^{ilm}\epsilon^{jpq}\left([\gamma^l\gamma^m, \gamma^p]\gamma^q + \gamma^p[\gamma^l\gamma^m, \gamma^q]\right) \ . \end{aligned} \tag{4.6-1}$$

Ako sada komutatore u zagradi razvijemo preko antikomutatora imamo

$$\begin{aligned} [\Sigma^i, \Sigma^j] &= -\frac{1}{4}\epsilon^{ilm}\epsilon^{jpq}\Big(\gamma^l\{\gamma^m, \gamma^p\}\gamma^q - \{\gamma^l, \gamma^p\}\gamma^m\gamma^q \\ &\quad +\gamma^p\gamma^l\{\gamma^m, \gamma^q\} - \gamma^p\{\gamma^l, \gamma^q\}\gamma^m\Big) \ . \end{aligned} \tag{4.6-2}$$

Primenom antikomutacionih relacija u (4.6-2) dobija se

$$[\Sigma^i, \Sigma^j] = -\frac{1}{2}\epsilon^{ilm}\epsilon^{jpq}\left(g^{mp}\gamma^l\gamma^q - g^{lp}\gamma^m\gamma^q + g^{mq}\gamma^p\gamma^l - g^{lq}\gamma^p\gamma^m\right) \ . \tag{4.6-3}$$

Prvi član u izrazu (4.6-3) transformisaćemo na sledeći način

$$\epsilon^{ilm}\epsilon^{jpq}g^{mp}\gamma^l\gamma^q = (\delta^{ij}\delta^{lq} - \delta^{iq}\delta^{lj})\gamma^l\gamma^q = -3\delta^{ij} - \gamma^j\gamma^i \ .$$

Slično se mogu transformisati i preostala tri člana u (4.6-3), pa nakon sređivanja izraza (4.6-2) dobijamo da je desna strana jednaka $(\gamma^j\gamma^i - \gamma^i\gamma^j)$. Sa druge strane je

$$2i\epsilon^{ijk}\Sigma^k = -\epsilon^{ijk}\epsilon^{klm}\gamma^l\gamma^m = (\gamma^j\gamma^i - \gamma^i\gamma^j),$$

čime smo pokazali traženu jednakost. Dokazana jednakost pokazuje da su operatori $\frac{1}{2}\vec{\Sigma}$ generatori SU(2) podgrupe Lorentz-ove grupe u spinorskoj reprezentaciji.

(iii) $S^2 = -\frac{1}{4}\vec{\Sigma}^2 = -\frac{1}{4}(\gamma_5\gamma_0\vec{\gamma})^2 = \frac{1}{4}\vec{\gamma}\vec{\gamma} = -\frac{3}{4}$.

4.7 Koristiti $\vec{\sigma}\hat{p}\varphi_r = (-1)^{r+1}\varphi_r$ kao i $\vec{\sigma}\hat{p}\chi_r = (-1)^r\chi_r$ iz zadatka 4.2. Na primer:

$$\begin{aligned}
\frac{\vec{\Sigma}\vec{p}}{|\vec{p}|}u_r(\vec{p}) &= \frac{\vec{\Sigma}\vec{p}}{|\vec{p}|}\mathcal{N}\begin{pmatrix} \varphi_r \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E_p+m}\varphi_r \end{pmatrix} \\
&= \mathcal{N}\begin{pmatrix} \vec{\sigma}\hat{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}\hat{p} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_r \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E_p+m}\varphi_r \end{pmatrix} \\
&= \mathcal{N}\begin{pmatrix} \vec{\sigma}\hat{p}\varphi_r \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}\vec{\sigma}\hat{p}}{E_p+m}\varphi_r \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{r+1}\mathcal{N}\begin{pmatrix} \varphi_r \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E_p+m}\varphi_r \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{r+1}u_r(\vec{p}) \ ,
\end{aligned}$$

gde je $\mathcal{N}$ normalizacioni faktor. Lako se vidi da spinori $u_r(\vec{p})$ i $v_r(\vec{p})$ nisu svojstveni spinori operatora $\vec{\Sigma}\vec{n}$, sem ako vektor $\vec{n}$ nije kolinearan sa $\vec{p}$.

4.8 Operator prelaska iz nepokretnog sistema u sistem koji se kreće duž $z-$ose brzinom v je $S(\Lambda(v\vec{e}_z)) = e^{-\frac{i}{2}\omega_{03}\sigma^{03}}$. Ako se iskoristi $\omega_{03} = -\varphi = -\text{arc th}(v)$, dobija se

$$S(\Lambda) = \text{ch}\frac{\varphi}{2}\text{I} - \text{sh}\frac{\varphi}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ \sigma^3 & o \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{E_p+m}{2m}}\begin{pmatrix} \text{I} & -\frac{p\sigma^3}{E_p+m} \\ -\frac{p\sigma^3}{E_p+m} & \text{I} \end{pmatrix}$$

U slučaju proizvoljnog busta umesto $\sigma^3 p$ treba staviti $\vec{\sigma}\vec{p}$. Lako se vidi da ovaj operator nije unitaran. To je posledica teoreme iz teorije Lee-jevih grupa po kojoj nekompaktne grupe (kakva je Lorentz-ova) nemaju konačno dimenzione unitarne ireducibilne reprezentacije.

4.9 Operator prelaska u sistem zarotiran za ugao θ oko $z-$ose je

$$S = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\sigma^3 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\sigma^3 \end{pmatrix}.$$

Operator S jeste unitaran, jer je SO(3) kompaktna podgrupa Lorentz-ove grupe.

4.10 Koristeći osobinu da je proizvod simetričnog i antisimetričnog tenzora jednak nuli kao i zadatak 3.16 lako ćete pokazati da je

$$W^2\psi(x) = \frac{1}{4}\sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\sigma}\partial^\nu\partial_\sigma\psi.$$

Kako je $\sigma_{\mu\sigma}\sigma^{\mu\nu} = 2\gamma_\sigma\gamma^\nu + \delta^\nu_\sigma$, to se primenom Dirac-ove jednačine lako dobija traženi rezultat.

4.11 Lako se vidi (zadatak 3.16 i uslov $sp = 0$) da je

$$\begin{aligned} W_\mu s^\mu &= \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\sigma^{\nu\rho}P^\sigma s^\mu = \frac{1}{2i}\gamma_5\sigma_{\mu\sigma}P^\sigma s^\mu \\ &= \frac{1}{2}\gamma_5(\gamma_\mu\gamma_\sigma - g_{\mu\sigma})p^\sigma s^\mu = \frac{1}{2}\gamma_5 \not{s}\not{p} \ , \end{aligned}$$

što je traženi rezultat. U sistemu mirovanja vektor s^μ prelazi u $(0, \vec{n})$, pa je $\not{s} = -\vec{n}\vec{\gamma}$. Sa druge strane u sistemu mirovanja, zbog jednačine kretanja važi $\frac{\not{p}}{m} = \frac{p^0\gamma^0}{m} = \gamma^0$ pa je

$$\frac{W \cdot s}{m} = \frac{1}{2}\gamma_5\gamma_0\vec{n}\vec{\gamma} = \frac{1}{2}\vec{\Sigma}\vec{n} \ ,$$

na osnovu zadatka 4.6.

4.12 Za pozitivno frekventna rešenja imamo

$$\gamma_5\not{s}u(\vec{p}, \pm s) = \pm u(\vec{p}, \pm s) \ .$$

Ako za vektor s^μ u sistemu mirovanja izaberemo $(0, \vec{n} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|})$, po uslovu zadatka, onda je u sistemu u kome se elektron kreće sa impulsom $\vec{p}$, kvadrivektor $s^\mu = (\frac{|\vec{p}|}{m}, \frac{E_p}{m}\vec{n})$ (primenimo Lorentz-ov bust na vektor polarizacije u sistemu mirovanja). Tako dobijamo

$$\frac{1}{m}\gamma_5\not{s}\not{p}u(\vec{p}, \pm s) = \frac{1}{m}\gamma_5\left(\frac{|\vec{p}|}{m}\gamma_0 - \frac{E_p}{m}\vec{\gamma}\vec{n}\right)(E_p\gamma_0 - \vec{p}\vec{\gamma})u(\vec{p}, \pm s) \qquad (4.12\text{-}1)$$

Ako u (4.12-1) iskoristimo $(\vec{p}\vec{\gamma})^2 = -\vec{p}^2$ dolazimo do

$$\frac{1}{m}\gamma_5\not{s}\not{p}u(\vec{p}, \pm s) = \gamma_5\gamma_0\vec{\gamma}\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}u(\vec{p}, \pm s) = \vec{\Sigma}\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}u(\vec{p}, \pm s) \ . \qquad (4.12\text{-}2)$$

Iz (4.12-2) je jasno da smo u ovom slučaju dobili jednačine iz zadatka 4.7. Čitaocu ostavljamo da isto proveri u slučaju negativno frekventnih rešenja.

4.13 Ako je $(0, \vec{n})$ vektor polarizacije u sistemu mirovanja, gde je $\vec{n}^2 = 1$ tada u sistemu gde se Dirac-ova čestica kreće sa impulsom $\vec{p}$ on je $s^\mu = (\frac{|\vec{p}|}{m}, \frac{p_0}{m}\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|})$. U ultrarelativističkom limesu je $m \ll |p_0|$ pa je

$$s^\mu \approx \left(\frac{p_0}{m}\left[1 - \frac{m^2}{2p_0^2}\right], \frac{\vec{p}}{m}\left[1 + \frac{m^2}{2p_0^2}\right]\right) \approx \frac{p^\mu}{m} \ .$$

Zadržavajući samo najviše članove u gornjem razvoju imamo

$$\gamma_5 \not{s} u(\vec{p}, \pm s) \approx \gamma_5 \frac{\not{p}}{m} u(\vec{p}, \pm s) = \gamma_5 u(\vec{p}, \pm s) \ ,$$

gde smo primenili Dirac-ovu jednačinu, $\not{p}u(\vec{p}, \pm s) = mu(\vec{p}, \pm s)$. Vidimo da u ultrarelativističkom limesu operator heliciteta, $\vec{\Sigma}\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$ prelazi u operator kiralnosti, γ_5. Svojstvene jednačine onda postaju

$$\gamma_5 u(\vec{p}, \pm s) = \pm u(\vec{p}, \pm s)$$

Sa $v-$spinorima situacija je analogna. Dakle, za čestice visokih energija (tj. malih masa) helicitet i kiralnost su približno jednaki, dok se za bezmasene čestice ta dva pojma poklapaju.

4.14 Da operatori $\not{p}$ i $\gamma_5 \not{s}$ komutiraju sledi iz $sp = 0$. Kako je $(\gamma_5 \not{s})^2 = -s^2 = 1$ onda su svojstvene vrednosti operatora $\gamma_5 \not{s}$ jednake ± 1. Odgovarajući projektori su

$$\Sigma(\pm s) = \frac{1 \pm \gamma_5 \not{s}}{2}.$$

4.15 Rezultat je:

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{\Sigma}\vec{n} \right\rangle \ = \ & \frac{1}{|a|^2 + |b|^2} \frac{E_p + m}{2E_p} \Big(n_3 |a|^2 + (n_1 + in_2) b^* a + (n_1 - in_2) a^* b - n_3 |b|^2 \\ & + \frac{E_p - m}{E_p + m} (n_3 |a|^2 + (-n_1 + in_2) a^* b - (n_1 + in_2) b^* a - n_3 |b|^2 \Big) . \end{aligned}$$

U nerelativističkom limesu dobija se

$$\left\langle \vec{\Sigma}\vec{n} \right\rangle = \varphi^\dagger \vec{\sigma}\vec{n} \varphi = \frac{n_3 |a|^2 + (n_1 + in_2) b^* a + (n_1 - in_2) a^* b - n_3 |b|^2}{|a|^2 + |b|^2}.$$

4.16 U sistemu mirovanja traženi spinor ima oblik $\begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt}$, gde je φ određeno iz uslova

$$\frac{1}{2} \vec{\Sigma}\vec{n} \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

Poslednji uslov se svodi na

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -i\sin\theta \\ i\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \ , \qquad (4.16\text{-}1)$$

gde je $\varphi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Iz poslednjeg izraza nalazimo

$$\varphi = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ i\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \ . \qquad (4.16\text{-}2)$$

Dirac-ov spinor u sistemu mirovanja ima oblik

$$u(m,n) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ i\sin\frac{\theta}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt} \ . \tag{4.16-3}$$

Sada je potrebno da dati spinor bustiramo duž $z-$ose

$$\psi(x) = S(-p\vec{e}_z)u(m,n)e^{-ipx} \ , \tag{4.16-4}$$

gde je S dato u zadatku 4.8. Primetite znak minus u $S(-p\vec{e}_z)$. Nakon trivijalnog računa dobijamo

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{E_p+m}{2m}} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ i\sin\frac{\theta}{2} \\ \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{E_p+m}\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ i\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{-ipx} \ . \tag{4.16-5}$$

Tražena očekivana vrednost definisana je sa

$$\left\langle \frac{1}{2}\gamma_5 \not{s} \right\rangle = \frac{1}{2}\frac{\int d^3x \psi^\dagger \gamma_5 \not{s} \psi}{\int d^3x \psi^\dagger \psi} \ , \tag{4.16-6}$$

gde je s kvadrivektor dobijen iz vektora $(0,\vec{n})$ Lorentz-ovim bustom duž $z-$ose. Njegove komponente su $s_0 = \frac{\vec{n}\vec{p}}{m}$, $\vec{s} = \vec{n} + \frac{(\vec{n}\vec{p})\vec{p}}{m(E_p+m)}$. U našem slučaju je $s^\mu = (\frac{p}{m}\cos\theta, 0, \sin\theta, \frac{E_p}{m}\cos\theta)$. Dalje je (u Dirac-ovoj reprezentaciji)

$$\gamma_5 \not{s} = \begin{pmatrix} \vec{s}\vec{\sigma} & -s_0 I \\ s_0 I & -\vec{s}\vec{\sigma} \end{pmatrix} \ . \tag{4.16-7}$$

Nakon smene vektora s u (4.16-7) dobijamo

$$\gamma_5 \not{s} = \begin{pmatrix} \frac{E}{m}\cos\theta & -i\sin\theta & -\frac{p}{m}\cos\theta & 0 \\ i\sin\theta & -\frac{E}{m}\cos\theta & 0 & -\frac{p}{m}\cos\theta \\ \frac{p}{m}\cos\theta & 0 & -\frac{E}{m}\cos\theta & i\sin\theta \\ 0 & \frac{p}{m}\cos\theta & -i\sin\theta & \frac{E}{m}\cos\theta \end{pmatrix} \ . \tag{4.16-8}$$

Nakon zamene (4.16-8) i (4.16-5) u (4.16-6) dobija se da je tražena očekivana vrednost $1/2$, što je očekivan rezultat jer je $\psi(x)$ svojstveni spinor operatora $\gamma_5 \not{s}$ sa svojstvenom vrednošću $1/2$.

4.17 Dirac-ov hamiltonijan možemo da napišemo preko γ matrica pa je $[H_D, \gamma_5] = [\gamma^0\vec{\gamma}\vec{p} + \gamma^0 m, \gamma_5] = 2m\gamma^0\gamma_5$. Dakle, operator γ_5 jeste konstanta kretanja u slučaju bezmasene Dirac-ove čestice. Njegove svojstvene vrednosti su ± 1, dok su svojstveni projektori $\Sigma_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$. Operator γ_5 naziva se operatorom kiralnosti.

4.18 Množeći Dirac-ovu jednačinu matricom γ_5 sa leva dobijamo $(i\partial\!\!\!/+m)\gamma_5\psi = 0$. Sabirajući, odnosno oduzimajući poslednju jednačinu sa Dirac-ovom jednačinom dobijamo

$$i\partial\!\!\!/\psi_L - m\psi_R = 0,$$

$$i\partial\!\!\!/\psi_R - m\psi_L = 0\ .$$

4.19 (i) Dati sistem jednačina može se napisati kao Dirac-ova jednačina ako se za Dirac-ov spinor uzme

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}\ ,$$

dok skup

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar\sigma^\mu & 0 \end{pmatrix}\ ,$$

čini skup $\gamma-$matrica (vidi zadatak 3.20).

(ii) U primovanom sistemu ($x' = \Lambda x$) ove jednačine treba da imaju oblik

$$i\sigma^\mu\partial'_\mu\psi'_R(x') = m\psi'_L(x')\ , \tag{4.19-1}$$

$$i\bar\sigma^\mu\partial'_\mu\psi'_L(x') = m\psi'_R(x')\ , \tag{4.19-2}$$

da bi bile kovarijantne. Ako definišemo transformacije levog i desnog spinora $\psi'_L(x') = S_L\psi_L(x)$ i $\psi'_R(x') = S_R\psi_R(x)$, gde su S_L i S_R nesingularne 2×2 matrice, jednačine (4.19-1) i (4.19-2) postaju

$$i\sigma^\mu S_R\Lambda_\mu{}^\nu\partial_\nu\psi_R(x) = mS_L\psi_L(x)\ , \tag{4.19-3}$$

$$i\bar\sigma^\mu S_L\Lambda_\mu{}^\nu\partial_\nu\psi_L(x) = mS_R\psi_R(x)\ . \tag{4.19-4}$$

Množeći (4.19-3) sa leva sa S_L^{-1} i (4.19-4) sa S_R^{-1} isto sa leva dobija se

$$iS_L^{-1}\sigma^\mu S_R\Lambda_\mu{}^\nu\partial_\nu\psi_R(x) = m\psi_L(x)\ , \tag{4.19-5}$$

$$iS_R^{-1}\bar\sigma^\mu S_L\Lambda_\mu{}^\nu\partial_\nu\psi_L(x) = m\psi_R(x)\ . \tag{4.19-6}$$

Da bi jednačine bile kovarijantne potrebno je da su zadovoljeni uslovi

$$S_R^{-1}\bar\sigma^\mu S_L = \Lambda^\mu{}_\nu\bar\sigma^\nu$$

$$S_L^{-1}\sigma^\mu S_R = \Lambda^\mu{}_\nu\sigma^\nu\ .$$

Rešenje za matrice S_L i S_R (za infinitezimalne parametre koji su definisani u zadatku 1.8) je

$$S_L = 1 + \frac{1}{2}\varphi_i\sigma^i + \frac{i}{2}\theta_k\sigma^k\ , \tag{4.19-7}$$

$$S_R = 1 - \frac{1}{2}\varphi_i\sigma^i + \frac{i}{2}\theta_k\sigma^k \ . \qquad (4.19\text{-}8)$$

Za bust duž $x-$ose dobija se

$$S_L = \cosh\frac{\varphi_1}{2} + \sigma_1 \sinh\frac{\varphi_1}{2} \qquad (4.19\text{-}9)$$

$$S_R = \cosh\frac{\varphi_1}{2} - \sigma_1 \sinh\frac{\varphi_1}{2} \ . \qquad (4.19\text{-}10)$$

Primetimo da se ψ_L i ψ_R na isti način transformišu pri rotacijama, dok kod bustova postoji razlika u znaku. Levi ψ_L, odnosno desni ψ_R spinor transformišu se po $(1/2, 0)$ odnosno $(0, 1/2)$ ireducibilnim reprezentacijama Lorentz-ove grupe.

4.20 Očigledno je

$$[H_D, K] = [\vec{\alpha}\vec{p}, \beta(\vec{\Sigma}\vec{l})] + [\vec{\alpha}\vec{p}, \beta] + m[\beta, \beta(\vec{\Sigma}\vec{l})] \ . \qquad (4.20\text{-}1)$$

Prvi sabirak u (4.20-1) je

$$\begin{aligned} [\vec{\alpha}\vec{p}, \beta(\vec{\Sigma}\vec{l})] &= \beta[\vec{\alpha}\vec{p}, \vec{\Sigma}\vec{l}] + [\vec{\alpha}\vec{p}, \beta]\vec{\Sigma}\vec{l} \\ &= \frac{1}{2i}\beta\epsilon^{mnp}(p^i\{\alpha^i, \alpha^n\}\alpha^p l^m - p^i\alpha^n\{\alpha^i, \alpha^p\}l^m \\ &\quad + \epsilon^{mjk}\alpha^n\alpha^p\alpha^i[p^i, r^j p^k]) + i\beta\alpha^i p^i(\alpha^n\alpha^p r^n p^p - \alpha^p\alpha^n r^n p^p) \ . \end{aligned}$$

Ako dalje iskoristimo antikomutacione relacije između Dirac-ovih matrica kao i komutacione relacije između koordinata i komponenti impulsa imamo

$$\begin{aligned} [\vec{\alpha}\vec{p}, \beta(\vec{\Sigma}\vec{l})] &= -2i\beta(\alpha^j p^i r^i p^j - \alpha^j p^i r^j p^i + i\alpha^i p^i - \alpha^j p^i r^i p^j + \alpha^i p^j r^i p^j) \\ &= 2\beta(\vec{\alpha}\vec{p}) \ . \qquad (4.20\text{-}2) \end{aligned}$$

Drugi član u (4.20-1) je $-2\beta(\vec{\alpha}\vec{p})$ dok je treći jednak nuli. Iz (4.20-1), (4.20-2) i poslednjeg komentara sledi $[H_D, K] = 0$.

4.21 Primenom definicije $\sigma_{\mu\nu}-$matrica imamo

$$\begin{aligned} i\bar{u}(\vec{p}_1)\sigma^{\mu\nu}(p_1 - p_2)_\nu u(\vec{p}_2) &= \frac{1}{2}\bar{u}(\vec{p}_1)(\gamma^\nu\gamma^\mu - \gamma^\mu\gamma^\nu)(p_1 - p_2)_\nu u(\vec{p}_2) \\ &= \frac{1}{2}\bar{u}(\vec{p}_1)[-\gamma^\mu(\not{p}_1 - \not{p}_2) + (\not{p}_1 - \not{p}_2)\gamma^\mu]u(\vec{p}_2) \end{aligned}$$

Koristeći $\gamma^\mu\not{p} = 2p^\mu - \not{p}\gamma^\mu$ i slično za $\not{p}\gamma^\mu$ dobijamo

$$i\bar{u}(\vec{p}_1)\sigma^{\mu\nu}(p_1 - p_2)_\nu u(\vec{p}_2) = 2m\bar{u}(\vec{p}_1)\gamma^\mu u(\vec{p}_2) - (p_1 + p_2)^\mu\bar{u}(\vec{p}_1)u(p_2) \ ,$$

gde smo koristili činjenicu da $u(\vec{p})$ i $\bar{u}(\vec{p})$ zadovoljavaju Dirac-ovu jednačinu. Poslednji izraz je upravo traženi identitet.

4.23 Lako se vidi da je

$$\gamma_\alpha\gamma_\mu\gamma_\beta = 2g_{\alpha\mu}\gamma_\beta - 2g_{\alpha\beta}\gamma_\mu + 2g_{\mu\beta}\gamma_\alpha - \gamma_\beta\gamma_\mu\gamma_\alpha \ . \qquad (4.23\text{-}1)$$

Na osnovu (4.23-1) imamo

$$\bar{u}(\vec{p}_2)\not{p}_1\gamma_\mu\not{p}_2 u(\vec{p}_1) = 2m\bar{u}(\vec{p}_2)[p_1+p_2]_\mu u(\vec{p}_1) - \bar{u}(\vec{p}_2)[2p_1p_2+m^2]\gamma_\mu u(\vec{p}_1) \ , \qquad (4.23\text{-}2)$$

gde smo koristili Dirac-ovu jednačinu. Prvi član u (4.23-2) možemo transformisati zahvaljujući Gordon-ovom identitetu (zadatak 4.21). Tako dobijamo

$$\bar{u}(\vec{p}_2)[-2p_1p_2+3m^2]\gamma_\mu u(\vec{p}_1) - 2mi\bar{u}(\vec{p}_2)\sigma_{\mu\nu}q^\nu u(\vec{p}_1) \qquad (4.23\text{-}3)$$

što se lako prevodi na oblik

$$\bar{u}(\vec{p}_2)\Big\{(q^2+m^2)\gamma_\mu - 2im\sigma_{\mu\nu}q^\nu\Big\}u(\vec{p}_1),$$

iz kojeg se lako vidi da je $F_1 = q^2+m^2$ i $F_2 = -2mi$.

4.24 Krenimo od $\bar{u}(\vec{p})\gamma_5 u(\vec{p}) = \frac{1}{m}\bar{u}(\vec{p})\gamma_5\not{p}u(\vec{p}) = -\frac{1}{m}\bar{u}(\vec{p})\not{p}\gamma_5 u(\vec{p})$. Koristeći ponovo Dirac-ovu jednačinu dolazimo do $\bar{u}(\vec{p})\gamma_5 u(\vec{p}) = -\bar{u}(\vec{p})\gamma_5 u(\vec{p})$. Dakle $\bar{u}(\vec{p})\gamma_5 u(\vec{p}) = 0$. Primenom Gordon-ovog identiteta (za $\mu = 0$) dobijamo $\frac{1}{2}\bar{u}(\vec{p})(1-\gamma_5)u(\vec{p}) = \frac{m}{2E_p}N$.

4.25 $F_1 = -iq^2, \ F_2 = -2im, \ F_3 = -2m.$

4.26 Delovanjem sa $(i\not{\partial}+m)$ na Dirac-ovu jednačinu dobija se $(\Box + m^2)\psi = 0$.

4.27 Gustina verovatnoće je $\rho = \psi^\dagger(x)\psi(x)$. Koristeći izraz za talasnu funkciju iz zadatka 4.2 lako se pokazuje da je $\rho = \frac{E_p}{m}$. Gustina struje data je sa $\vec{j} = \bar{\psi}\vec{\gamma}\psi = \frac{\vec{p}}{m}\bar{\psi}\psi$, gde smo koristili Gordon-ovu dekompoziciju struje (za $\mu = i$). Dakle, $\vec{j} = \frac{\vec{p}}{m}$. Jasno je da je jednačina kontinuiteta zadovoljena.

4.28 (i) Zamenom (4.2-10) u izraz za veličinu Q dobijamo

$$\begin{aligned} Q &= -e\int d^3x\psi^\dagger\psi \\ &= -e\sum_{r,s}\int d^3p\frac{m}{E_p}\Big[c_r^\dagger(\vec{p})c_s(\vec{p})u_r^\dagger(\vec{p})u_s(p) \\ &\quad +d_r(\vec{p})d_s^\dagger(\vec{p})v_r^\dagger(p)v_s(p) + c_r^\dagger(\vec{p})d_s^\dagger(-\vec{p})u_r^\dagger(\vec{p})v_s(-\vec{p})e^{2iE_pt} \\ &\quad +d_r(\vec{p})c_s(-\vec{p})v_s^\dagger(\vec{p})u_s(-\vec{p})e^{-2iE_pt}\Big] \ , \end{aligned} \qquad (4.28\text{-}1)$$

nakon integracije po $\vec{x}$ i po $\vec{q}$. Primenom Gordon-ovog identiteta relacije ortogonalnosti prepisujemo u obliku

$$u_r^\dagger(\vec{p})u_s(\vec{p}) = v_r^\dagger(\vec{p})v_s(\vec{p}) = \frac{E_p}{m}\delta_{rs}, \ \ v_r^\dagger(-\vec{p})u_s(\vec{p}) = u_r^\dagger(-\vec{p})v_s(\vec{p}) = 0,$$

iz (4.28-1) sledi

$$Q = -e \sum_r \int d^3p \left(c_r^\dagger(\vec{p}) c_r(\vec{p}) + d_r(\vec{p}) d_r^\dagger(\vec{p}) \right) \ . \tag{4.28-2}$$

(ii) Primenom Dirac-ove jednačine $(-i\gamma^i \partial_i + m)\psi = i\gamma_0 \partial_0 \psi$ i izraza (4.2-10) hamiltonijan je

$$\begin{aligned} H &= i \int d^3x \psi^\dagger \partial_0 \psi \\ &= \sum_{r,s} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x d^3p d^3q \sqrt{\frac{m}{E_p}} \sqrt{\frac{m}{E_q}} \left(u_r^\dagger(\vec{p}) c_r^\dagger(\vec{p}) e^{ipx} \right. \\ &\quad \left. + v_r^\dagger(\vec{p}) d_r(\vec{p}) e^{-ipx} \right) E_q \left(u_s(\vec{q}) c_s(\vec{q}) e^{-iqx} - v_s(\vec{q}) d_s^\dagger(\vec{q}) e^{iqx} \right) \\ &= \sum_r \int d^3p E_p \left(c_r^\dagger(\vec{p}) c_r(\vec{p}) - d_r(\vec{p}) d_r^\dagger(\vec{p}) \right) \ . \end{aligned} \tag{4.28-3}$$

(iii)

$$\vec{P} = \sum_r \int d^3p \vec{p} \left(c_r^\dagger(\vec{p}) c_r(\vec{p}) - d_r(\vec{p}) d_r^\dagger(\vec{p}) \right) \ . \tag{4.28-4}$$

4.29 Operator $\vec{r}$ u Heisenberg-ovoj slici zadovoljava jednačinu

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -i[\vec{r}, H_D] = \vec{\alpha}.$$

Da bismo integralili poslednju jednačinu potrebno je da nađemo Dirac-ove matrice u Heisenberg-ovoj slici, $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(t)$. Iz jednačine kretanja,

$$\frac{d\vec{\alpha}}{dt} = i[H_D, \vec{\alpha}] = 2i(\vec{p} - \vec{\alpha} H_D) \ ,$$

dobija se $(\vec{p} - \vec{\alpha} H_D) = \vec{\alpha}(0) e^{-2iH_D t}$. Rezultat je

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) - i(\vec{\alpha}(0) - \frac{\vec{p}}{H_D}) \frac{1}{2H_D} + i(\vec{\alpha}(0) - \frac{\vec{p}}{H_D}) \frac{1}{2H_D} e^{-2iH_D t}.$$

4.30 Potrebno je naći koeficijente $c_r(\vec{p})$ i $d_r^*(\vec{p})$ u razvoju

$$\psi(0, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sum_r \int d^3p \sqrt{\frac{m}{E_p}} (c_r(\vec{p}) u_r(\vec{p}) e^{i\vec{p}\vec{x}} + d_r^*(\vec{p}) v_r(\vec{p}) e^{-i\vec{p}\vec{x}}) \ . \tag{4.30-1}$$

Koristeći relacije ortogonalnosti, dobija se

$$\begin{aligned}
c_1(\vec{p}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{E_p+m}{2E_p}} \ , \\
c_2(\vec{p}) &= 0, \\
d_1^*(\vec{p}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\sqrt{2E_p(E_p+m)}}(p^1+ip^2) \ , \\
d_2^*(\vec{p}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\sqrt{2E_p(E_p+m)}}p^3 \ .
\end{aligned} \tag{4.30-2}$$

Talasna funkcija u proizvoljnom trenutku $t > 0$ je

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\sum_r \int d^3p\sqrt{\frac{m}{E_p}}(c_r(\vec{p})u_r(\vec{p})_r e^{-ipx} + d_r^*(\vec{p})v_r(\vec{p})e^{ipx}) \ , \tag{4.30-3}$$

gde su koeficijenti c i d dati sa (4.30-2).

4.31 Postupajući kao u prethodnom zadatku koeficijenti u razvoju (4.30-1) su:

$$\begin{aligned}
c_1(\vec{p}) &= \left(\frac{d^2}{\pi}\right)^{\frac{3}{4}}\sqrt{\frac{E_p+m}{2E_p}}e^{-\frac{d^2\vec{p}^2}{2}} \ , \\
c_2(\vec{p}) &= 0 \ , \\
d_1^*(\vec{p}) &= \left(\frac{d^2}{\pi}\right)^{\frac{3}{4}}\frac{1}{\sqrt{2E_p(E_p+m)}}e^{-\frac{d^2\vec{p}^2}{2}}p_3 \ , \\
d_2^*(\vec{p}) &= \left(\frac{d^2}{\pi}\right)^{\frac{3}{4}}\frac{1}{\sqrt{2E_p(E_p+m)}}(p^1+ip^2)e^{-\frac{d^2\vec{p}^2}{2}} \ .
\end{aligned}$$

4.32 Jednačina Dirac-ove čestice u elektromagnetnom polju ima oblik

$$[i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - m]\psi = 0 \ . \tag{4.32-1}$$

Ako pretpostavimo da talasna funkcija u oblasti $z > 0$ ima oblik

$$\psi = \begin{pmatrix}\varphi \\ \chi\end{pmatrix} e^{-iEt+iqz} \ , \tag{4.32-2}$$

onda (4.32-1) u toj oblasti prelazi u

$$\begin{pmatrix} E-m-V & -\vec{\sigma}\vec{q} \\ \vec{\sigma}\vec{q} & -E-m+V \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi \\ \chi\end{pmatrix} = 0 \ . \tag{4.32-3}$$

Da bi sistem jednačina (4.32-3) imao netrivijalna rešenja potrebno je da važi

$$E = V + \sqrt{\vec{q}^2+m^2} \ . \tag{4.32-4}$$

Talasna funkcija elektrona je

$$\begin{aligned}
\psi_I &= a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p\sigma_3}{(E+m)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{-iEt+ipz} \\
&+ b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-p\sigma_3}{(E+m)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{-iEt-ipz}, \quad z < 0 \qquad (4.32\text{-}5) \\
\psi_{II} &= d \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{q\sigma_3}{(E+m-V)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{-iEt+iqz}, \quad z > 0 \ ,
\end{aligned}$$

gde je $p = \sqrt{E^2 - m^2}$. Sabirci proporcionalni sa koeficijentima a, b, d u (4.32-5) su upadni ψ_{in}, reflektovani ψ_r, odnosno transmitovani talas ψ_t. Iz uslova neprekidnosti talasne funkcije u $z = 0$ imamo

$$a + b = d \ , \qquad (4.32\text{-}6)$$

$$a - b = rd \ , \qquad (4.32\text{-}7)$$

gde je $r = \frac{E+m}{E+m-V}\frac{q}{p}$. Koeficijent transmisije je

$$T = \frac{j_{tr}}{j_{in}} = \frac{\psi_{tr}^\dagger \alpha_3 \psi_{tr}}{\psi_{in}^\dagger \alpha_3 \psi_{in}} = \frac{4r}{(1+r)^2} \ , \qquad (4.32\text{-}8)$$

dok je koeficijent refleksije

$$R = 1 - T = \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2 . \qquad (4.32\text{-}9)$$

Ako je $V > 0$ i $|E - V| < m$ tada je $q = i\kappa$ imaginarno pa talasna funkcija eksponencijalno opada u oblasti $z > 0$. Povećavajući potencijal očekivali bi da talasna funkcija brže opada u oblasti II, kao što je to slučaj u nerelativističkoj kvantnoj mehanici. Međutim, za $V > E + m$ vidimo da impuls q postaje ponovo realan, pa je talasna funkcija oscilatorna. Razlog za to je u činjenici da postoje dva dela u spektru elektrona između kojih je procep širine $2m$. Dalje, vidi se da u tom slučaju koeficijent refleksije postaje veći od 1. Opisani efekt je poznat kao Klein-ov paradoks.

4.33 Talasnu funkciju u oblastima $z < 0$, $0 < z < a$, $z > a$ obeleležićemo sa ψ_I, ψ_{II}, ψ_{III}, respektivno. Rešenje Dirac-ove jednačine je

$$\psi_I = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p\sigma_3}{(E+m)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{ipz} + B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-p\sigma_3}{(E+m)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{-ipz} \ ,$$

$$
\begin{aligned}
\psi_{II} &= C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{q\sigma_3}{(E+m-V)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{iqz} + D \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-q\sigma_3}{(E+m-V)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{-iqz} \ , \\
\psi_{III} &= F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p\sigma_3}{(E+m)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{ipz} \ ,
\end{aligned}
$$

gde je $p = \sqrt{E^2 - m^2}$ i $q = \sqrt{(E-V)^2 - m^2}$. Iz graničnih uslova $\psi_I(0) = \psi_{II}(0)$, $\psi_{II}(a) = \psi_{III}(a)$, za koeficijent transmisije dobija se

$$
T = |F|^2 = 16 \frac{|r|^2}{|(1+r)^2 e^{-iqa} - (1-r)^2 e^{iqa}|^2} \ ,
$$

gde je $r = \frac{q}{p} \frac{E+m}{E+m-V}$.

4.34 Talasna funkcija elektrona je

$$
\begin{aligned}
\psi_I &= \begin{pmatrix} B \\ B' \\ \frac{-i\kappa\sigma_3}{(E+m)} \begin{pmatrix} B \\ B' \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{\kappa z}, \quad z < -a, \\
\psi_{II} &= \begin{pmatrix} C \\ C' \\ \frac{q\sigma_3}{(E+m+V_0)} \begin{pmatrix} C \\ C' \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{iqz} + \begin{pmatrix} D \\ D' \\ \frac{-q\sigma_3}{(E+m+V_0)} \begin{pmatrix} D \\ D' \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{-iqz}, \quad -a < z < a, \\
\psi_{III} &= \begin{pmatrix} F \\ F' \\ \frac{i\kappa\sigma_3}{(E+m)} \begin{pmatrix} F \\ F' \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{-\kappa z}, \ z > a,
\end{aligned}
$$

gde je $\kappa = \sqrt{m^2 - E^2}$ i $q = \sqrt{(E+V_0)^2 - m^2}$. Kako je potencijal parna funkcija to se spektar sastoji od parnih i neparnih funkcija, tj. $\psi'(z) = \gamma_0 \psi(-z) = \pm\psi(z)$. Iz poslednje relacije imamo $B = \pm F$, $C = \pm D$, $B' = \pm F'$, $C' = \pm D'$. Gornji znak odnosi se na parna a donji na neparna rešenja. Iz graničnih uslova dobija se disperziona relacija:

$$
\mathrm{tg}(qa) = \pm \Big(\frac{\kappa}{q} \frac{E+m+V_0}{E+m} \Big)^{\pm 1} \ ,
$$

za parna, odnosno neparna rešenja.

4.35 Dirac-ova jednačina u ovom slučaju ima oblik

$$
\left[i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^1 \left(\frac{\partial}{\partial x} - ieBy \right) + i\gamma^2 \frac{\partial}{\partial y} + i\gamma^3 \frac{\partial}{\partial z} - m \right] \psi = 0 \ . \qquad (4.35\text{-}1)
$$

Rešenje jednačine (4.35-1) tražimo u obliku

$$\psi = e^{-iEt+ip_x x+ip_z z}\begin{pmatrix}\varphi(y)\\ \chi(y)\end{pmatrix} . \tag{4.35-2}$$

Smenom (4.35-2) u jednačinu (4.35-1) imamo

$$\begin{pmatrix} E-m & (eBy-p_x)\sigma_1 - p_z\sigma_3 + i\sigma_2\frac{d}{dy} \\ (p_x-eBy)\sigma_1 + p_z\sigma_3 - i\sigma_2\frac{d}{dy} & -E-m \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} = 0 . \tag{4.35-3}$$

Iz druge jednačine u (4.35-3) sledi

$$\chi(y) = \frac{p_x\sigma_1 + p_z\sigma_3 - eBy\sigma_1 - i\sigma_2\frac{d}{dy}}{E+m}\varphi(y) , \tag{4.35-4}$$

što smenom u prvu jednačinu sistema (4.35-3) daje

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - (p_x - eBy)^2 + E^2 - m^2 - p_z^2 - eB\sigma_3\right)\varphi = 0 . \tag{4.35-5}$$

Smenom, $p_x - eBy = \xi$ jednačina (4.35-5) se svodi na Schrödinger-ovu jednačinu za LHO (parametri M, ω i ϵ) gde je $M^2\omega^2 = \frac{1}{(eB)^2}$, $2M\epsilon = \frac{E^2-m^2-p_z^2\mp eB}{(eB)^2}$. Svojstvene energije su

$$E_n = \sqrt{m^2 + p_z^2 \pm eB + (2n+1)eB}, \tag{4.35-6}$$

gde je $n = 0, 1, 2, \ldots$

4.36 Delovanjem sa $(i\not{\partial} + e\not{A} + m)$ na $(i\not{\partial} + e\not{A} - m)\psi(x) = 0$, dobija se

$$[\Box - ie\gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu A_\nu - 2ieA^\mu\partial_\mu - e^2A^2 + m^2]\psi = 0 .$$

Sa druge strane pokažite da je

$$-\frac{e}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = ie(\partial_\mu A^\mu - \gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu A_\nu) .$$

Kombinovanjem poslednja dva izraza dobija se tražena relacija.

4.37 Zamenom

$$\psi = \begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} e^{-imt}$$

u Dirac-ovu jednačinu dobijaju se jednačine

$$\begin{aligned}\left(i\frac{\partial}{\partial t} + eA_0\right)\varphi &= c\vec{\sigma}(\vec{p} + e\vec{A})\chi ,\\ \left(i\frac{\partial}{\partial t} + 2mc^2 + eA_0\right)\chi &= c\vec{\sigma}(\vec{p} + e\vec{A})\varphi .\end{aligned}$$

Iz druge od njih, u slučaju $\vec{A}=0$, sledi

$$\chi = \frac{1}{2mc}\left(\vec{\sigma}\vec{p}\varphi - \frac{i}{2mc^2}\vec{\sigma}\vec{p}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{eA_0}{2mc^2}\vec{\sigma}\vec{p}\varphi\right) ,$$

što zamenom u prvu daje

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} = H'\varphi ,$$

gde je

$$H' = \left[\frac{\vec{p}^2}{2m} - eA_0 - \frac{\vec{p}^4}{8m^3c^2} + \frac{e}{4m^2c^2}(2i\vec{E}\vec{p} - \Delta A_0) - \frac{e}{4m^2c^2}(i\vec{E}\vec{p} - \vec{\sigma}(\vec{E}\times\vec{p}))\right]$$

Operator obeležen sa H', nije hamiltonijan jer nije hermitski. To je povezano sa činjenicom da veličina $\varphi^\dagger\varphi$ nije gustina verovatnoće. Gustina verovatnoće je $\varphi^\dagger(1+\frac{\vec{p}^2}{4m^2c^2})\varphi + o\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$. Potrebno je preći na Schrödinger-ovu dvokomponentnu talasnu funkciju $\varphi_s = (1+\frac{\vec{p}^2}{8m^2c^2})\varphi$. Pri tome je hamiltonijan

$$H = \left(1+\frac{\vec{p}^2}{8m^2c^2}\right)H'\left(1-\frac{\vec{p}^2}{8m^2c^2}\right) ,$$

odnosno

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} - eA_0 - \frac{\vec{p}^4}{8m^3c^2} - \frac{e}{8m^2c^2}\Delta A_0 + \frac{e}{4m^2c^2}\vec{\sigma}(\vec{E}\times\vec{p}) .$$

Ako je $\vec{A}\neq 0$ za hamiltonijan se dobija

$$H = \frac{(\vec{p}+e\vec{A})^2}{2m} - eA_0 + \frac{e}{2mc}\vec{\sigma}\vec{B} - \frac{\vec{p}^4}{8m^3c^2} - \frac{e}{8m^2c^2}\Delta A_0 + \frac{e}{4m^2c^2}\vec{\sigma}(\vec{E}\times(\vec{p}+e\vec{A})) .$$

4.38 $V_\mu^* = V_\mu^\dagger = (\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)^\dagger = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi = V_\mu$, jer je $\gamma_\mu^\dagger = \gamma_0\gamma_\mu\gamma_0$. Dakle V_μ jeste realna veličina.
Pri pravim ortohronim Lorentz-ovim transformacijama V_μ se transformiše po

$$V'_\mu(x') = \bar{\psi}'(x')\gamma_\mu\psi'(x') = \psi^\dagger\gamma_0 S^{-1}\gamma_\mu S\psi(x) .$$

U prethodnom izrazu primenili smo $\gamma_0 S^{-1} = S^\dagger\gamma_0$. Ako dalje iskoristimo $S^{-1}\gamma_\mu S = \Lambda_\mu{}^\nu\gamma_\nu$ dobićemo $V'_\mu(x') = \Lambda_\mu{}^\nu V_\nu(x)$. Dakle, V_μ je Lorentz-ov četvorovektor.
Pri prostornoj inverziji imamo

$$V_\mu(t,\vec{x}) \to V'_\mu(t,-\vec{x}) = \bar{\psi}(t,\vec{x})\gamma_0\gamma_\mu\gamma_0\psi(t,\vec{x}) ,$$

odakle je $V_0'(t,\vec{x}) = V_0(t,-\vec{x}),\ V_i'(t,\vec{x}) = -V_i(t,-\vec{x})$.
Pri konjugaciji naboja imamo $\psi(x) \to \psi_c(x) = C\bar{\psi}^T$ i $\bar{\psi} \to \psi^T C$. Tako dobijamo $V_\mu \to -\psi^T C\gamma_\mu C^{-1}\bar{\psi}^T = (\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)^T = V_\mu$. Koristili smo $C\gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T$ i $C = -C^{-1}$ (Pokažite ove osobine).
Pri inverziji vremena $\psi(x) \to \psi'(-t,\vec{x}) = T\psi^*(t,\vec{x})$, gde važi $T\gamma_\mu T^{-1} = \gamma^{\mu *} = \gamma_\mu^T$ i $T^\dagger = T^{-1} = T = -T^*$. Lako se dobija da je $\bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}'(-t,\vec{x}) = \psi^T(t,\vec{x})T\gamma_0$. Konačno $V_0'(-t,\vec{x}) = V_0(t,\vec{x}),\ V_i'(-t,\vec{x}) = -V_i(t,\vec{x})$.

4.39 Pri Lorentz-ovim transformacijama imamo

$$\begin{aligned} A'^\mu(x') &= \Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma^\nu S^{-1}\gamma_5 S\psi(x) \\ &= \det\Lambda\Lambda^\mu{}_\nu\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\gamma_5\psi(x) = \det\Lambda\Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x) \ . \end{aligned}$$

Pri konjugaciji naboja veličina A^μ menja znak. Prostorna inverzija menja znak nultoj a ne menja prostornoj komponenti, dok vremenska inverzija "radi" suprotno.

4.40 Rezultati su:

$$\begin{aligned} T'^{\mu\nu}(\Lambda x) &= \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma T^{\rho\sigma}(x) \ ; \\ T_c^{\mu\nu}(x) &= T^{\mu\nu}(x) \ ; \\ T_p^{0i}(t,-\vec{x}) &= -T^{0i}(t,\vec{x}) \ , \quad T_p^{ij}(t,-\vec{x}) = T^{ij}(t,\vec{x}) \ ; \\ T_t^{ij}(-t,\vec{x}) &= -T^{ij}(t,\vec{x}) \ , T_t^{0i}(-t,\vec{x}) = T^{0i}(t,\vec{x}) \ . \end{aligned}$$

4.41 Veličina $\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ je Lorentz-ov skalar. Prostorna inverzija ne transformiše zadatu veličinu. Pri konjugacijii naboja dobija se $(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi$. Vremenska inverzija transformiše datu veličinu u $-(\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi)^*$.

4.42 Data jednakost dobija se transponovanjem Dirac-ove jednačine

$$\bar{u}(p,s)(\not{p} - m) = 0,$$

uz korišćenje $C^{-1}\gamma^\mu C = -(\gamma^\mu)^T$.

4.43 Pretpostavimo da postoje dve različite matrice C i C' koje zadovoljavaju zadatu relaciju. Iz $C\gamma_\mu C^{-1} = C'\gamma_\mu C'^{-1}$ sledi $[C'^{-1}C, \gamma_\mu] = 0$ odakle na osnovu zadatka 3.18, sledi tražena osobina.

4.44 Direktnim računom imamo:

(i)

$$\psi_c(x) = N_p \begin{pmatrix} -\frac{p}{E+m}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{ipx} \ .$$

Konjugacija naboja menja spin i impuls čestice.

(ii)

$$\psi'(x') = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt'} \ .$$

(iii)

$$\psi_p(t, -\vec{x}) = N_p \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ -\frac{p}{E_p+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{-i(Et-pz)} \ .$$

Prostorna refleksija menja smer impulsa čestice. Vremenska refleksija zadatu talasnu funkciju prevodi u

$$\psi_t(-t, \vec{x}) = -iN_p \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{p}{E_p+m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^{i(Et-pz)} \ ,$$

odakle se vidi da se menjaju i impuls i spin.

4.45 $P = \gamma_0, \ C = i\gamma^2\gamma^0 = i \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & -\sigma^2 \end{pmatrix}$

4.46 Delovanjem sa γ_0 na

$$\vec{\Sigma}\frac{\vec{p}}{\mid p \mid} u_r(p) = (-1)^{r+1} u_r(p) \ , \qquad (4.46\text{-}1)$$

dobija se

$$\vec{\Sigma}\frac{-\vec{p}}{\mid p \mid} u_r(-p) = (-1)^{r} u_r(-p) \ , \qquad (4.46\text{-}2)$$

jer je $\gamma_0 u_r(\vec{p}) = u_r(-\vec{p})$. Iz (4.46-2) se vidi da zbog promene impulsa čestice dolazi i do promene heliciteta.
Pri vremenskoj inverziji talasna funkcija Dirac-ove čestice (4.2-6) prelazi u

$$\begin{aligned} \psi_t = i\gamma^1\gamma^3\psi_r^*(\vec{p}) &= -\begin{pmatrix} \sigma^2\varphi_r^* \\ \frac{\sigma^2\vec{\sigma}^*\vec{p}}{E_p+m}\varphi_r^* \end{pmatrix} e^{i(E_pt-\vec{p}\vec{x})} \\ &= -\begin{pmatrix} \sigma^2\varphi_r^* \\ -\frac{\vec{\sigma}\vec{p}\sigma^2}{E_p+m}\varphi_r^* \end{pmatrix} e^{i(E_pt-\vec{p}\vec{x})} \ , \qquad (4.46\text{-}3) \end{aligned}$$

gde je u drugom koraku iskorišćeno $\sigma^2\vec{\sigma}^* = -\vec{\sigma}\sigma^{2*}$. Iz poslednjeg izraza vidi se da se pri vremenskoj refleksiji menja impuls čestice, tj. $\vec{p} \to -\vec{p}$. Dalje, pokažite da je $\sigma^2\varphi_1^* = i\varphi_2$ i $\sigma^2\varphi_2^* = -i\varphi_1$. Uzmimo, jednostavnosti radi, da je $r=1$ (slučaj $r=2$ je potpuno analogan). Iz (4.46-3) imamo

$$\psi_t = -i\begin{pmatrix} \varphi_2 \\ -\frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{E_p+m}\varphi_2 \end{pmatrix} e^{i(E_pt-\vec{p}\vec{x})} \ . \tag{4.46-4}$$

Delujući sa $\frac{\vec{\Sigma}(-\vec{p})}{|\vec{p}|}$ na (4.46-4) vidi se da se helicitet ne menja. Do istog zaključka dolazi se konjugujući i množeći jednačinu (4.46-1) sa leva izrazom $i\gamma^1\gamma^3$. Za $v-$spinore dokaz je analogan.

4.47 Nakon transformacije hamiltonijan je

$$H' = \vec{\alpha}\vec{p}\left(\cos(2p\theta) - \frac{m}{p}\sin(2p\theta)\right) + m\beta\left(\cos(2p\theta) + \frac{m}{p}\sin(2p\theta)\right) \ ,$$

gde je $p = |\vec{p}|$. Da bi H' imao neparan oblik potrebno je da koeficijent uz $\vec{\alpha}\vec{p}$ bude nula. To je ispunjeno za $\mathrm{tg}(2p\theta) = p/m$.

4.49 Pokažite prvo da je

$$\vec{\alpha}\vec{p}\left(\cos(2p\theta) - \frac{m}{p}\sin(2p\theta)\right) = \sqrt{\frac{E_p+m}{2E_p}} + \frac{\beta\vec{\alpha}\vec{p}}{\sqrt{2E_p(E_p+m)}} \ ,$$

pa je

$$\vec{x}_{FW} = \left(\sqrt{\frac{E_p+m}{2E_p}} + \frac{\beta\vec{\alpha}\vec{p}}{\sqrt{2E_p(E_p+m)}}\right)\vec{x}\left(\sqrt{\frac{E_p+m}{2E_p}} - \frac{\beta\vec{\alpha}\vec{p}}{\sqrt{2E_p(E_p+m)}}\right) .$$

Koristeći $[\vec{x}, f(p)] = -i\nabla f(p)$ dobija se

$$\vec{x}_{FW} = \vec{x} + i\frac{\vec{p}}{2E_p(E_p+m)} - i\frac{\vec{p}(\beta\vec{\alpha}\vec{p})}{2E_p^2(E_p+m)} - i\frac{\beta\vec{\alpha}}{2E_p} - i\frac{\vec{\alpha}(\vec{\alpha}\vec{p})}{2E_p(E_p+m)} \ ,$$

što se može prepisati u obliku

$$\vec{x}_{FW} = \vec{x} - i\frac{\vec{p}(\beta\vec{\alpha}\vec{p})}{2E_p^2(E_p+m)} - i\frac{\beta\vec{\alpha}}{2E_p} - \frac{\vec{\Sigma}\times\vec{p}}{2E_p(E_p+m)} \ .$$

Pri Foldy-Wouthuysen-ovoj transformaciji impuls se ne menja te je

$$[x^k_{FW}, p^l_{FW}] = i\delta^{kl} \ .$$

Klasična polja i simetrije

5.1 Potrebno je da primenimo definiciju funkcionalnog izvoda (5.A).

(i) Iz $\delta F_\mu = \partial_\mu \delta\phi = \int d^4y (\partial_\mu \delta\phi)_y \delta^{(4)}(y-x) = -\int d^4y \partial^y_\mu \delta^{(4)}(y-x)\delta\phi(y)$, sledi

$$\frac{\delta F_\mu[\phi(x)]}{\delta\phi(y)} = -\partial^y_\mu \delta^{(4)}(y-x) \ ,$$

(ii) $\frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} = -\Box_y \delta^{(4)}(y-x) - \frac{\partial^2 V}{\partial\phi(x)\partial\phi(y)} \delta^{(4)}(x-y)$.

5.2 U ovom zadatku koristićemo jednačine kretanja (5.B).

(i) Kako je $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\rho} = m^2 A^\rho$ i $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma A_\rho)} = -2\partial^\rho A^\sigma + \lambda g^{\rho\sigma}(\partial_\mu A^\mu)$ onda je

$$(\lambda - 2)\partial_\sigma \partial^\rho A^\sigma - m^2 A^\rho = 0 \ .$$

(ii) $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma A_\rho)} = -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial(\partial_\sigma A_\rho)} = -\frac{1}{2} F^{\mu\nu}(\delta^\sigma_\mu \delta^\rho_\nu - \delta^\sigma_\nu \delta^\rho_\mu) = -F^{\sigma\rho}$. U poslednjem koraku koristili smo činjenicu da je $F_{\mu\nu}$ antisimetričan tenzor, tj. $F_{\rho\sigma} = -F_{\sigma\rho}$. Euler-Lagrange-ova jednačina kretanja je

$$\partial_\sigma F^{\sigma\rho} + m^2 A^\rho = 0 \ ,$$

što nakon zamene izraza za $F^{\rho\sigma}$ prelazi u

$$\left(\delta^\rho_\sigma \Box - \partial_\sigma \partial^\rho + m^2 \delta^\rho_\sigma\right) A^\sigma = 0 \ .$$

(iii) $(\Box + m^2)\phi = -\lambda\phi^3$

(iv) Varijacijom dejstva po elektromagnetnom polju, A_μ, dobija se

$$-\Box A^\rho + \partial_\sigma \partial^\rho A^\sigma = -ie[\phi(\partial^\rho \phi^* + ieA^\rho \phi^*) - \phi^*(\partial^\rho \phi - ieA^\rho \phi)] \ .$$

Jednačine kretanja za polja ϕ i ϕ^* su

$$\Box\phi^* + 2ieA^\rho \partial_\rho \phi^* + ie\phi^* \partial_\rho A^\rho - e^2 A^2 \phi^* + m^2 \phi^* = 0 \ ,$$

$$\Box\phi - 2ieA^\rho \partial_\rho \phi - ie\phi \partial_\rho A^\rho - e^2 A^2 \phi + m^2 \phi = 0 \ .$$

(v) Jednačine kretanja su

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = ig\gamma_5\psi\phi, \quad \bar{\psi}(i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial_\mu} + m) = -ig\bar{\psi}\gamma_5\phi \; ,$$

$$\Box\phi + m^2\phi = \lambda\phi^3 - ig\bar{\psi}\gamma_5\psi \; .$$

5.3 Dokazaćemo da smena $\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \partial_\mu F^\mu(\phi_r)$ u dejstvu ne utiče na jednačine kretanja, tj. da je

$$\delta\int_\Omega d^4x\partial_\mu F^\mu(\phi_r) = 0 \; .$$

Primenom Gauss-ove teoreme imamo

$$\delta\int_\Omega d^4x\partial_\mu F^\mu(\phi_r) = \oint_{\partial\Omega} d\Sigma^\mu\delta F_\mu = \oint_{\partial\Omega} d\Sigma^\mu\frac{\partial F_\mu}{\partial\phi_r}\delta\phi_r = 0 \; ,$$

jer je varijacija polja na granici nula.

5.4 Dodati dejstvu divergenciju $-\frac{1}{2}\partial_\mu(\phi\partial^\mu\phi)$. Primetimo da ona nema oblik iz zadatka 5.3, jer F^μ zavisi od izvoda polja. Međutim,

$$\delta\int\partial_\mu(\phi\partial^\mu\phi) = \oint d\Sigma^\mu\delta(\phi\partial_\mu\phi) = \oint d\Sigma^\mu(\delta\phi\partial^\mu\phi + \phi\delta\partial_\mu\phi) \; .$$

Prvi član je nula jer je $\delta\phi|_{\partial\Omega} = 0$. Ako uzmemo da je granica u $r \to \infty$, drugi član je takođe nula jer polja opadaju u beskonačnosti u nulu.

5.5 Postupite kao u prethodnom zadatku.

5.6 Na jednačinu kretanja masenog vektorskog polja dobijenu u zadatku 5.2 (ii) potrebno je delovati sa ∂_σ. Tako se dolazi do $m^2\partial_\rho A^\rho = 0$ odakle sledi traženi uslov, jer je $m \neq 0$.

5.7 Jačina polja, $F_{\mu\nu}$ je invarijanta na gradijentne transformacije. Iz toga sledi i invarijantnost lagranžijana. Uslov $\partial_\mu A^\mu = 0$ ne sledi iz jednačina kretanja, ali se upravo koršćenjem gradijentne simetrije ovaj uslov, koji se inače naziva Lorentz-ova kalibracija, može nametnuti na potencijale.

5.9 Kako je transformacija unutrašnja dovoljno je proveriti samo invrijantnost lagranžijana na zadate transformacije. Prvi član u lagranžijanu se transformiše na sledeći način:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[(\partial\phi_1)^2 + (\partial\phi_2)^2] &\to \frac{1}{2}[(\partial\phi_1')^2 + (\partial\phi_2')^2] = \\ &= \frac{1}{2}[(\partial\phi_1\cos\theta - \partial\phi_2\sin\theta)^2 + (\partial\phi_1\sin\theta + \partial\phi_2\cos\theta)^2] \\ &= \frac{1}{2}[(\partial\phi_1)^2 + (\partial\phi_2)^2] \; .\end{aligned}$$

Slično se pokazuje i za preostala dva člana iz lagranžijana. Infinitezimalne varijacije polja ϕ_i su $\delta\phi_1 = -\theta\phi_2$ i $\delta\phi_2 = \theta\phi_1$ pa je

$$j_\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi_i)}\delta\phi_i = \theta(\phi_1\partial_\mu\phi_2 - \phi_2\partial_\mu\phi_1) \ .$$

Parametar θ može biti odbačen. Naboj koji odgovara SO(2) simetriji je $Q = \int d^3x(\phi_1\dot{\phi}_2 - \phi_2\dot{\phi}_1)$.

5.10 Pri SU(2) transformacijama $\phi' = e^{\frac{i}{2}\tau^a\theta^a}\phi$, gde su τ^a $(a = 1, 2, 3)$ Pauli-jeve matrice. Infinitezimalno je $\delta\phi_i = \frac{i}{2}\tau^a_{ij}\theta^a\phi_j$ i $\delta\phi^*_i = -\frac{i}{2}\phi^*_j\tau^a_{ji}\theta^a$ gde indeks i uzima vrednosti $1, 2$. Noether-ina struja je $j^a_\mu = -\frac{i}{2}\Big(\partial_\mu\phi^*_i\tau^a_{ij}\phi_j - \phi^*_i\tau^a_{ij}\partial_\mu\phi_j\Big)$, dok su naboji $Q^a = -\frac{i}{2}\int d^3x(\partial_0\phi^*_i\tau^a_{ij}\phi_j - \phi^*_i\tau^a_{ij}\partial_0\phi_j)$.

5.11 Struje i naboji dati su sa

$$j^a_\mu = \frac{1}{2}\bar{\psi}_i\gamma^\mu\tau^a_{ij}\psi_j \ , \quad Q^a = \frac{1}{2}\int d^3x\psi^\dagger_i\tau^a_{ij}\psi_j \ .$$

Jednačine kretanja su $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi_i = 0$ i $\bar{\psi}_i(i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial_\mu} + m) = 0$. Da je $\partial_\mu j^{\mu a} = 0$ pokazuje se lako:

$$2\partial_\mu j^{\mu a} = (\partial_\mu\bar{\psi}_i)\gamma^\mu\tau^a_{ij}\psi_j + \bar{\psi}_i\gamma^\mu\tau^a_{ij}\partial_\mu\psi_j = im\bar{\psi}_i\gamma^\mu\tau^a_{ij}\psi_j + \bar{\psi}_i\gamma^\mu\tau^a_{ij}(-im\psi_j) = 0 \ ,$$

gde smo u poslednjem koraku koristili jednačine kretanja, jer Noether-ina teorema važi na jednačinama kretanja.

5.12 Fazna invarijantnost je zapravo $U(1)$ simetrija, pri kojoj $\psi \to \psi' = e^{i\theta}\psi$ i analogno za $\bar{\psi}$.

(i) Noether-ina struja je $j_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$, dok je $Q = \int d^3x\psi^\dagger\psi$. Primetimo da struja nema pored Lorentz-ovog dopunski indeks, jer je U(1) jednoparametarska grupa simetrije.

(ii) $j_\mu = i(\phi^*\partial_\mu\phi - \phi\partial_\mu\phi^*)$, $Q = i\int d^3x(\phi^*\partial_0\phi - \phi\partial_0\phi^*)$

5.13 Jednačine kretanja su $(\Box + m^2)\phi_i = 0$. Invarijantnost lagranžijana je posledica činjenice da je forma $\phi^T\phi$ invarijantna pri SO(3) rotacijama. Pri SO(3) transformacijama varijacije polja su $\delta\phi_i = i(J^k)_{ij}\theta^k\phi_j = -\epsilon_{kij}\theta_k\phi_j$ pa je Noether-ina struja

$$j_\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi_i)}\delta\phi_i = -\epsilon_{kij}\phi_j\partial_\mu\phi_i\theta_k \ .$$

Zbog proizvoljnosti parametara rotacija, θ_k očuvane su i struje

$$j_{\mu k} = -\epsilon_{kij}\phi_j\partial_\mu\phi_i \ .$$

5.14 Prvo pokazati da je $e^{i\alpha\gamma_5} = \cos\alpha + i\gamma_5 \sin\alpha$. Pri kiralnim transformacijama Dirac-ov lagranžijan prelazi u

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} \to\ & \psi^\dagger e^{-i\alpha\gamma_5}\gamma_0(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)e^{i\alpha\gamma_5}\psi \\
&= (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)\bar{\psi}i\gamma_\mu\partial^\mu\psi \ - m(\cos\alpha + i\gamma_5\sin\alpha)^2\bar{\psi}\psi \\
&= \bar{\psi}i\gamma_\mu\partial^\mu\psi \ - m(\cos\alpha + i\gamma_5\sin\alpha)^2\bar{\psi}\psi \ .
\end{aligned}
$$

Dakle, lagranžijan jeste invarijantan na kiralne transformacija ako se radi o bezmasenom Dirac-ovom polju. Noether-ina struja je $j_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$. Proverite da je $\partial_\mu j^\mu$ proporcijalno sa masom Dirac-ove čestice m.

5.15 Noether-ina struja je

$$
j_\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\sigma)}\delta\sigma + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\pi^i)}\delta\pi^i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu N_a)}\delta N_a + \delta\bar{N}_a\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\bar{N}_a)} \ ,
$$

odakle se dobija

$$
\vec{j}_\mu = \vec{\pi}\times\partial_\mu\vec{\pi} + \frac{1}{2}\bar{N}\gamma_\mu\vec{\tau}N \ .
$$

5.16 Pri translacijama je $\delta x^\mu = \epsilon^\mu$, dok je totalna varijacija polja nula. Noether-ina struja je

$$
T^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\frac{\partial\phi_r}{\partial x_\nu} - \mathcal{L}g^{\mu\nu} \ . \tag{5.16-1}
$$

Indeks ν u (5.16-1) je indeks translacione grupe simetrije. Za skalarno polje, iz (5.16-1) se dobija

$$
T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}[(\partial\phi)^2 - m^2\phi^2]g_{\mu\nu} \ . \tag{5.16-2}
$$

Očuvani naboji su hamiltonijan (za $\nu = 0$)

$$
H = \int d^3x T^{00} = \frac{1}{2}\int d^3x[(\partial_t\phi)^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2] \ , \tag{5.16-3}
$$

odnosno (tro)-impuls (za $\nu = i$)

$$
P^i = \int d^3x T^{0i} = \int d^3x\partial_t\phi\partial^i\phi \ . \tag{5.16-4}
$$

U slučaju Dirac-ovog polja tenzor energije impulsa je $T^{\mu\nu} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi - \mathcal{L}g^{\mu\nu}$, dok su hamiltonijan i impuls dati sa

$$
H \ = \ \int d^3x\bar{\psi}[-i\vec{\gamma}\nabla + m]\psi \ , \tag{5.16-5}
$$

$$
\vec{P} \ = \ i\int d^3x\psi^\dagger\nabla\psi \ . \tag{5.16-6}
$$

U slučaju elektromagnetnog polja iz $T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\rho)} \frac{\partial A_\rho}{\partial x_\nu} - \mathcal{L} g^{\mu\nu}$ odakle je

$$T^{\mu\nu} = -F^{\mu\rho}\partial^\nu A_\rho + \frac{1}{4}F^2 g^{\mu\nu} \ . \tag{5.16-7}$$

Tenzor energije impulsa nije jednoznačno određen. Moguće mu je dodati član čija je četvorodivergencija nula, tj.

$$T^{\mu\nu} \to T^{\mu\nu} + \partial_\rho \psi^{\mu\nu\rho} \ , \tag{5.16-8}$$

gde je $\psi^{\mu\nu\rho} = -\psi^{\rho\nu\mu}$. Ova smena je korektna jer je divergencija novog tenzora energije impulsa nula. Naboji (u našem slučaju su to energija i impuls) se ne menjaju pri ovoj smeni. Za antisimetričan tenzor ψ uzećemo $\psi^{\mu\nu\rho} = F^{\mu\rho}A^\nu$, pa je novi tenzor energije impulsa

$$T^{\mu\nu} = -F^{\mu\rho}F^\nu{}_\rho + \frac{1}{4}F^2 g^{\mu\nu} \ . \tag{5.16-9}$$

Ako dalje uvedemo električno i magnetno polje sa $F^{0i} = -E^i$, $F_{ij} = -\epsilon_{ijk}B^k$ komponente TEI su (proverite)

$$\begin{aligned} T^{00} &= \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \ , \\ T^{0i} &= (\vec{E} \times \vec{B})^i \ , \\ T_{ij} &= -\left(E_i E_j + B_i B_j - \delta_{ij} T_{00}\right) \ . \end{aligned} \tag{5.16-10}$$

Iz (5.16-10) se vidi da su T_{00} T^{0i}, $-T_{ij}$ gustina energije elektromagnetnog polja, komponente Poynting-ovog vektora odnosno komponente Maxwell-ovog tenzora napona.
Pri Lorentz-ovim transformacijama $\delta x^\nu = \omega^{\nu\rho}x_\rho$ dok su totalne varijacije polja $\delta\phi = 0$, $\delta\psi = -\frac{i}{4}\sigma_{\nu\rho}\omega^{\nu\rho}\psi$, $\delta A_\mu = \omega_\mu{}^\nu A_\nu$. Noether-ina struje su

$$\begin{aligned} j_\mu &= [x_\nu T_{\mu\rho} - x_\rho T_{\mu\nu}]\omega^{\nu\rho} \ , \\ j_\mu &= [\frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma_\mu\sigma_{\nu\rho}\psi + \ x_\nu T_{\mu\rho} - x_\rho T_{\mu\nu}]\omega^{\nu\rho} \ . \\ j_\mu &= [F_{\mu\rho}A_\nu - F_{\mu\nu}A_\rho + (x_\nu T_{\mu\rho} - x_\rho T_{\mu\nu})]\omega^{\nu\rho} \ , \end{aligned} \tag{5.16-11}$$

redom za skalarno, spinorsko odnosno elektromagnetno polje. Odbacivanjem parametara Lorentz-ove grupe simetrije $\omega^{\nu\rho}$ očuvane struje su oblika $M_{\mu\nu\rho}$ i dati su izrazima u uglastim zagradama izraza (5.16-11). Naboj je ugaoni moment $M_{\nu\rho} = \int d^3x M_{0\nu\rho}$.

5.17 Varijacija forme polja definisana je sa $\delta_0\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x)$. Kako je $\delta_0\phi = \delta\phi - \partial_\mu\phi\delta x^\mu$, gde je $\delta\phi = \phi'(x') - \phi(x)$ totalna varijacija polja, to dobijamo

$$\delta_0\phi = \rho(\phi(x) + x^\mu\partial_\mu\phi) \ , \tag{5.17-1}$$

za infinitezimalnu varijaciju forme polja ϕ.
Varijacija dejstva je

$$\delta S = \int d^4x \, [\delta_0 \mathcal{L} + \partial_\mu(\mathcal{L}\delta x^\mu)] \ , \tag{5.17-2}$$

što za infinitezimalne transformacije daje

$$\delta S = \rho \int d^4x[-m^2(\phi^2 + \phi x^\nu \partial_\nu \phi) + \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \partial_\mu (x^\alpha \partial_\alpha \phi)\partial^\mu \phi - x^\mu \partial_\mu \mathcal{L} - 4\mathcal{L}] \ . \tag{5.17-3}$$

Nakon sređivanja izraza (5.17-3) dobijamo

$$\delta S = m^2 \rho \int d^4x \phi^2 \ . \tag{5.17-4}$$

Iz (5.17-4) je jasno da dejstvo za bezmaseno skalarno polje jeste dilataciono invarijantno.
Noether-ina struja je

$$j^\mu = \phi \partial^\mu \phi + x^\nu \partial^\mu \phi \partial_\nu \phi - \mathcal{L} x^\mu \ . \tag{5.17-5}$$

Izračunajte $\partial_\mu j^\mu$ i uverite se da je rezultat proporcionalan sa m.

5.18 $j^\mu = \frac{3}{2} i \bar{\psi} \gamma^\mu \psi + i x^\nu \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\nu \psi - x^\mu \mathcal{L}$.

Green-ove funkcije

6.1 Green-ova funkcija za Klein-Gordon-ovu jednačinu definisana je sa

$$(\Box_x + m^2)\Delta(x-y) = -\delta^{(4)}(x-y)\ . \tag{6.1-1}$$

Fourier-ovom transformacijom iz (6.1-1) dobijamo

$$(\Box_x + m^2)\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\tilde{\Delta}(k)e^{-ik(x-y)} = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k e^{-ik(x-y)}\ . \tag{6.1-2}$$

Iz (6.1-2) sledi $\tilde{\Delta}(k) = \frac{1}{k^2-m^2} = \frac{1}{k_0^2-\vec{k}^2-m^2}$. Dakle, Green-ova funkcija je

$$\Delta(x-y) = \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k_0^2-\vec{k}^2-m^2}e^{-ik(x-y)}\ . \tag{6.1-3}$$

Integral u (6.1-3) je divergentan, jer podintegralna funkcija ima polove u $k_0 = \pm\omega_k$. Modifikovaćemo konturu integracije obilazeći polove pa će integral (6.1-3) postati konvergentan. Naravno mi smo dužni da damo fizičku motivaciju za ovaj postupak. Postoje četiri načina obilaska polova. Prvi od njih je da polove obiđemo sa gornje strane (sl. 1). Eksponencijalni član u (6.1-3) za velike k_0 ponaša se kao $e^{\mathrm{Im}k_0(x_0-y_0)}$ odakle vidimo da za $x_0 > y_0$ konturu dopunjavamo sa donje strane (jer je $\mathrm{Im}k_0 < 0$), dok za $x_0 < y_0$ to činimo sa suprotne strane. Na osnovu Cauchy-jeve teoreme o rezidumima imamo

$$\Delta(x-y) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3k e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})}2\pi i(\mathrm{Res}_{\omega_k} + \mathrm{Res}_{-\omega_k})\theta(x^0-y^0)\ . \tag{6.1-4}$$

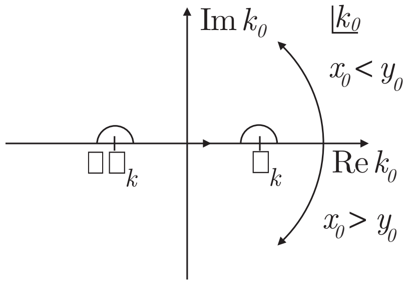
Iz (6.1-4) se dobija

$$\Delta_R = -\frac{i}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{2\omega_k}e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})}(e^{-i\omega_k(x^0-y^0)} - e^{i\omega_k(x^0-y^0)})\theta(x^0-y^0)\ . \tag{6.1-5}$$

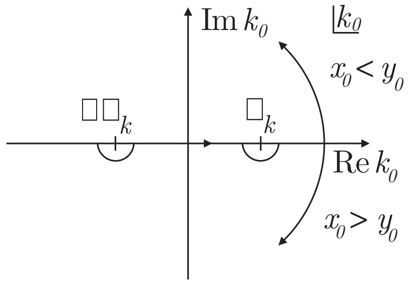
Izraz (6.1-5) je tzv. retardovana Green-ova funkcija. Rešenje nehomogene jednačine $(\Box + m^2)\phi = J$ je

$$\phi(x) = -\int d^4y \Delta(x-y)J(y) + \phi_0 \ , \qquad (6.1\text{-}6)$$

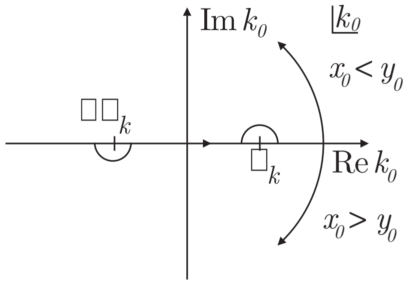
gde je ϕ_0 rešenje homogene jednačine. Iz (6.1-5) i (6.1-6) (zbog $\theta-$funkcije) jasno je da doprinos pri integraciji po y^0 potiče od vremenskih trenutaka koji su pre x^0. Dakle, vrednost polja ϕ u trenutku x_0 određena je vrednošću struje J u ranijim trenucima vremena. Otud naziv *retardovana Green-ova funkcija.*



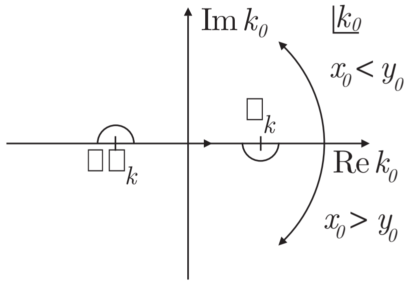
Slika 1



Slika 2



Slika 3



Slika 4

Obilazeći polove kao na slici 2 dobijamo tzv. *advansiranu Green-ovu funkciju*

$$\Delta_A = \frac{i}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{2\omega_k} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})}(e^{-i\omega_k(x^0-y^0)} - e^{i\omega_k(x^0-y^0)})\theta(y^0-x^0) \ . \qquad (6.1\text{-}7)$$

Advansirana Green-ova funkcija daje nenulti doprinos polju $\phi(x)$ iz budućnosti.

Ako polove obilazimo kao na slici 3 dobićemo tzv. *Feynman-ov propagator*

$$\begin{aligned}\Delta_F &= \frac{i}{(2\pi)^3}\int d^3k e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})}\Big[\mathrm{Res}_{-\omega_k}\theta(y^0-x^0) - \mathrm{Res}_{\omega_k}\theta(x^0-y^0)\Big] \\ &= -\frac{i}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{2\omega_k} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})}\Big[e^{-i\omega_k(x^0-y^0)}\theta(x^0-y^0) \qquad (6.1\text{-}8) \\ &\qquad + e^{i\omega_k(x^0-y^0)}\theta(y^0-x^0)\Big] \ .\end{aligned}$$

Na osnovu obilaska polova vidimo da informaciju iz prošlosti nose pozitivno frekventna rešenja, dok iz budućnosti postoji doprinos od negativno frekventnih rešenja. To je upravo ono što nam treba u relativističkoj kvantnoj fizici, za razliku od klasične teorije (npr. klasične elektrodinamike) gde je "u igri" retardovana Green-ova funkcija.

Na slici 4 prikazano je obilaženje polova kod tzv. *Dyson-ove Green-ove funkcije.* Postupajući kao i u prethodna tri slučaja lako se nalazi odgovarajuća Green-ova funkcija, što ostavljamo studentima za samostalnu vežbu.

6.2 Na osnovu (6.1-5) i (6.1-8) lako se pokazuje da je (uz $y = 0$)

$$\Delta_F(x) - \Delta_R(x) = -\frac{i}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{2\omega_k} e^{i(\omega_k t - \vec{k}\vec{x})} \ , \qquad (6.2\text{-}1)$$

na osnovu trivijalnog identiteta $\theta(t) + \theta(-t) = 1$. Delujući sa $(\Box + m^2)$ na (6.2-1) pokazuje se da je $(\Box + m^2)[\Delta_F(x) - \Delta_R(x)] = 0$.

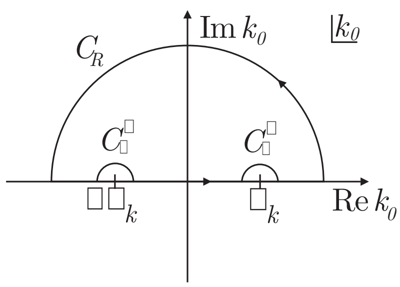
6.3

$$\begin{aligned}
I &= \int d^4k\delta(k^2 - m^2)\theta(k_0)f(k) \\
&= \int d^4k\delta(k_0^2 - \omega_k^2)\theta(k_0)f(k) \\
&= \int d^3k dk_0 \frac{1}{2\omega_k}\left[\delta(k_0 - \omega_k) + \delta(k_0 + \omega_k)\right]\theta(k_0)f(k) \\
&= \int \frac{d^3k}{2\omega_k} f(k) \ .
\end{aligned}$$

Na osnovu dokazane jednakosti jasno je da je $\frac{d^3k}{2\omega_k}$ Lorentz invarijantna mera.

6.5 Neka je $x_0 < 0$. Integral po konturi prikazanoj na slici 1 jednak je nuli jer ona ne obuhvata ni jedan pol. Dakle

$$\int_{-R}^{-\omega_k-\rho} + \int_{C_\rho^-} + \int_{-\omega_k+\rho}^{\omega_k+\rho} + \int_{C_\rho^+} + \int_{\omega_k+\rho}^{R} + \int_{C_R} = 0 \ . \qquad (6.5\text{-}1)$$



Po Jordan-ovoj lemi integral po polukružnici, C_R nakon uzimanja limesa $R \to \infty$ je 0. Integral $\int_{C_\rho^+}$ možemo izračunati uvođenjem smene $k_0 = \omega_k + \rho e^{i\varphi}$, tj.

$$\int_{C_\rho^+} = \int_\pi^0 i e^{-ix_0(\omega_k + \rho e^{i\varphi})} \frac{1}{\rho e^{i\varphi} + 2\omega_k} d\varphi \ . \tag{6.5-2}$$

Nakon uzimanja limesa $\rho \to 0$ iz (6.5-2) sledi

$$\int_{C_\rho^+} = -\frac{i\pi}{2\omega_k} e^{-i\omega_k x_0} \ . \tag{6.5-3}$$

Slično se dobija

$$\int_{C_\rho^-} = \frac{i\pi}{2\omega_k} e^{i\omega_k x_0} \ . \tag{6.5-4}$$

Iz (6.5-1), (6.5-3) i (6.5-4) dobija se da je za $x_0 < 0$

$$\bar{\Delta}(x) = \frac{i\pi}{(2\pi)^4} \int \frac{d^3k}{2\omega_k} e^{i\vec{k}\vec{x}} \left[e^{-i\omega_k x_0} - e^{i\omega_k x_0} \right] \theta(-x_0). \tag{6.5-5}$$

Slučaj $x_0 > 0$ potpuno je analogan prethodnom. Rezultat je

$$\bar{\Delta}(x) = -\frac{i\pi}{(2\pi)^4} \int \frac{d^3k}{2\omega_k} e^{i\vec{k}\vec{x}} \left[e^{-i\omega_k x_0} - e^{i\omega_k x_0} \right] \theta(x_0) \ . \tag{6.5-6}$$

Iz zadatka 6.1 sledi tražena relacija dok je iz (6.5-5) i (6.5-6) jasno da važi $\bar{\Delta}(-x) = \bar{\Delta}(x)$.

6.6

$$\Delta(x) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\omega_k} e^{i\vec{k}\vec{x}} (e^{-i\omega_k t} - e^{i\omega_k t}) \ , \tag{6.6-1}$$

$$\Delta_\pm(x) = \mp \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\omega_k} e^{i(\vec{k}\vec{x} \mp \omega_k t)} \ . \tag{6.6-2}$$

6.7 Neposrednom zamenom izraza za Δ iz zadatka 6.6 slede tražene relacije.

6.8 Delovanjem operatora $(\Box + m^2)$ na izraz (6.6-1) dobija se

$$(\Box + m^2)\Delta(x) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2\omega_k} (-\omega_k^2 + \vec{k}^2 + m^2) \left[e^{i(-\omega_k t + \vec{k}\vec{x})} - e^{i(\omega_k t + \vec{k}\vec{x})} \right] \ ,$$

odakle, zbog $k^2 = m^2$, sledi $(\Box + m^2)\Delta(x) \ = 0$.

6.9 U slučaju $m = 0$ iz (6.1-8) sledi

$$\begin{aligned}
\Delta_F|_{m=0} &= -\frac{i}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{2k} e^{i\vec{k}\vec{x}} \left[e^{-ikx^0}\theta(x^0) + e^{ikx_0}\theta(-x^0) \right] \\
&= -\frac{i}{2(2\pi)^2}\int_0^\infty \int_0^\pi k\sin\theta dk d\theta \left[e^{ik(-t+r\cos\theta)}\theta(t) \right. \\
&\qquad \left. + e^{ik(t+r\cos\theta)}\theta(-t) \right] , \qquad (6.9\text{-}1)
\end{aligned}$$

gde smo u drugom redu prešli na sferne koordinate i izvršili integraciju po polarnom uglu φ. Integracijom po θ dobija se

$$\begin{aligned}
\Delta_F(x)|_{m=0} &= -\frac{1}{2(2\pi)^2 r}\int_0^\infty dk \left[(e^{-ik(t-r)} - e^{-ik(t+r)})\theta(t) \right. \\
&\qquad \left. + (e^{ik(t+r)} - e^{ik(t-r)})\theta(-t) \right] . \qquad (6.9\text{-}2)
\end{aligned}$$

Dalje ćemo razlikovati dva slučaja $t > 0$ i $t < 0$. U prvom slučaju, $t > 0$ drugi sabirak u podintegralnoj funkciji (6.9-2) jednak je nuli. Preostali integral je divergentan, zbog ponašanja podintegralne funkcije u beskonačnosti. Smenom $t \to t - i\epsilon$, gde $\epsilon \to 0^+$ regularizovaćemo dati integral. Tako iz (6.9-2) dobijamo

$$\Delta_F|_{m=0} = \frac{i}{2(2\pi)^2 r}\left(\frac{1}{t-r-i\epsilon} - \frac{1}{t+r-i\epsilon} \right) . \qquad (6.9\text{-}3)$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^2}\frac{1}{t^2-r^2-i\epsilon} = \frac{i}{(2\pi)^2}\frac{1}{x^2-i\epsilon} . \qquad (6.9\text{-}4)$$

Ako dalje iskoristimo formulu

$$\frac{1}{z \pm i\epsilon} = \text{v.p.}\frac{1}{z} \mp i\pi\delta(z) , \qquad (6.9\text{-}5)$$

iz (6.9-4) dobijamo

$$\Delta_F(x)\ |_{m=0} = -\frac{1}{4\pi}\delta(x^2) + \frac{i}{4\pi^2}\text{v.p.}\frac{1}{x^2} . \qquad (6.9\text{-}6)$$

Slučaj $t < 0$ takođe daje ponovo (6.9-6), što vam ostavljamo da proverite.

6.10 Poći od (6.1-5) i preći na sferne koordinate. Integracijom po koordinatama θ i φ dobija se

$$\Delta_R(x) = -\frac{1}{2(2\pi)^2 r}\int_0^\infty dk \left[e^{-ik(t-r)} - e^{ik(t+r)} - e^{-ik(t+r)} + e^{ik(t-r)} \right] \theta(t) . \qquad (6.10\text{-}1)$$

Smenom $k' = -k$ u trećem i četvrtom integralu u (6.10-1) dobijamo

$$\Delta_R(x) = -\frac{1}{2(2\pi)^2 r}\int_{-\infty}^{\infty} dk(e^{-ik(t-r)} - e^{ik(t+r)})\theta(t) \ . \tag{6.10-2}$$

Primetite promenu donje granice integracije pri prelazu sa (6.10-1) na (6.10-2). Iz (6.10-2) dalje imamo

$$\Delta_R \mid_{m=0} (x) = -\frac{1}{4\pi r}\left[\delta(t-r) - \delta(t+r)\right]\theta(t) \ . \tag{6.10-3}$$

Drugi član u (6.10-3) ima "pogrešan" znak, no to nije problem, jer je on jednak nuli zbog $t > 0$ i $r > 0$. Zamenom tog minusa sa plusom u (6.10-3) dolazimo do

$$\Delta_R \mid_{m=0} (x) = -\frac{1}{2\pi}\delta(t^2 - r^2)\theta(t) = -\frac{1}{2\pi}\delta(x^2)\theta(t) \ . \tag{6.10-4}$$

Slučaj advansirane Green-ove funkcije ostavljamo vam za samostalnu vežbu.

6.11 U zadatku 6.1, pri definisanju odgovarajućih graničnih uslova, modifikovali smo konturu integracije, dok su polovi ostali u tačkama $k_0 = \pm\omega_k$. Nekad je zgodno da se uradi upravo obrnuto, tj. da se vrši integracija po realnoj k_0-osi, a da se polovi pomere. U slučaju retardovane Green-ove funkcije to se postiže smenom $k^2 - m^2 \to k^2 - m^2 + i\eta k_0$, gde je η mali pozitivan broj, u imeniocu propagatora. Dakle,

$$\Delta_R(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\eta k_0} \ . \tag{6.11-1}$$

Proverite da su polovi podintegralne funkcije integrala (6.11-1) u $k_0 = \pm\omega_k - i\eta/2$. Iz (6.1-6) i (6.11-1) imamo

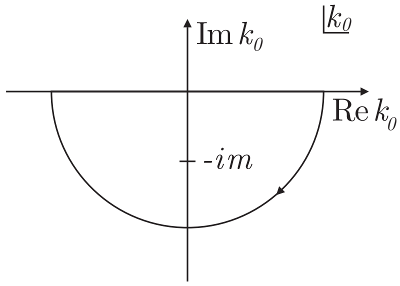
$$\phi_R(x) = -\frac{g}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{e^{-ikx}}{k^2 - m^2 + i\eta k_0}\int dy_0 e^{ik_0 y_0}\int d^3y \delta^{(3)}(\vec{y})e^{-i\vec{k}\vec{y}} \ . \tag{6.11-2}$$

Integraleći po y_0, a zatim po $\vec{y}$ i na kraju po k_0 u (6.11-2) dolazimo do

$$\phi_R(x) = \frac{g}{(2\pi)^3}\int d^3k \frac{e^{i\vec{k}\vec{x}}}{k^2 + m^2} \ . \tag{6.11-3}$$

Prelaskom na sferne koordinate u $\vec{k}$ prostoru (pri čemu se uzme da je $\vec{x} = r\vec{e}_z$) nakon integracije po θ i φ dobija se (uz smenu $k' = -k$ u jednom od integrala)

$$\phi_R(x) = -\frac{g}{(2\pi)^2 ir}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{kdk}{k^2 + m^2}e^{-ikr} \ . \tag{6.11-4}$$



Slika 1

Integral u (6.11-4) ima polove u $k_0 = \pm im$. Kontura integracije se bira (zbog ponašanja eksponenta pri velikim k) kao na slici 1. Primenom Cauchy-jeve teoreme, iz (6.11-4) dobija se

$$\phi_R(x) = \frac{g}{4\pi r} e^{-mr} \ , \tag{6.11-5}$$

što je traženi rezultat.

6.12 Delovati sa $i\partial\!\!\!/ - m$ na $S(x)$.

6.13 Fourier-ovom transformacijom jednačine $(i\partial\!\!\!/ - m)S(x-y) = \delta^{(4)}(x-y)$ dobija se

$$(i\partial\!\!\!/ - m)\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\tilde{S}(p)e^{-ip(x-y)} = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4pe^{-ip(x-y)} \ . \tag{6.13-1}$$

Iz (6.13-1) sledi $\tilde{S}(p) = \frac{p\!\!\!/ + m}{p^2 - m^2}$. Dakle Green-ova funkcija je

$$S(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{p\!\!\!/ + m}{p_0^2 - \vec{p}^2 - m^2}e^{-ip(x-y)} \ . \tag{6.13-2}$$

Polovi podintegralne funkcije u (6.13-2) su $p_0 = \pm E_p = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. Propagator je

$$S_F(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3pe^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}\int_{C_F} dp_0 \frac{p_0\gamma^0 + p^i\gamma_i + m}{p_0^2 - E_p^2}e^{-ip_0(x_0-y_0)} \ , \tag{6.13-3}$$

gde je kontura integracije C_F definisana u zadatku 6.1. Primenom Cauchy-jeve teoreme dobijamo

$$\begin{aligned} S_F(x-y) &= -\frac{i}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2E_p}e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}\Big[(E_p\gamma^0 + p_i\gamma^i + m)e^{-iE_p(x_0-y_0)}\theta(x_0-y_0) \\ &\qquad +(-E_p\gamma^0 + p_i\gamma^i + m)e^{iE_p(x_0-y_0)}\theta(y_0-x_0)\Big] \\ &= -\frac{i}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2E_p}\Big[(p\!\!\!/ + m)e^{-ip(x-y)}\theta(x_0-y_0) \\ &\qquad -(p\!\!\!/ - m)e^{ip(x-y)}\theta(y_0-x_0)\Big] \ . \end{aligned} \tag{6.13-4}$$

Analogno se dobija

$$S_A(x-y) = \frac{i}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2E_p} e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}\Big[(E_p\gamma^0+p_i\gamma^i+m)e^{-iE_p(x_0-y_0)} \\ -(-E_p\gamma^0+p_i\gamma^i+m)e^{iE_p(x_0-y_0)}\Big]\theta(y_0-x_0)\ . \quad (6.13\text{-}5)$$

Ako uzmemo, jednostavnosti radi, $y=0$ iz (6.13-4) i (6.13-5) dobijamo

$$\begin{aligned} S_F - S_A &= -\frac{i}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2E_p} e^{i(\vec{p}\vec{x}-E_px_0)}(E_p\gamma^0+p_i\gamma^i+m)(\theta(x_0)+\theta(-x_0)) \\ &= -\frac{i}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2E_p} e^{i(\vec{p}\vec{x}-E_px_0)}(E_p\gamma^0+p_i\gamma^i+m)\ . \qquad (6.13\text{-}6) \end{aligned}$$

Dakle

$$S_F - S_A = -\frac{i}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2E_p}(E_p\gamma^0+p^i\gamma_i+m)e^{-ipx}\ . \qquad (6.13\text{-}7)$$

Delovanjem sa $i\partial\!\!\!/ - m$ na (6.13-7) dobijamo $(i\partial\!\!\!/ - m)(S_F - S_A) = 0$, jer je $(p\!\!\!/ + m)(p\!\!\!/ - m) = p^2 - m^2 = 0$.

6.14 Integracija po konturi C_F ekvivalentna je integraciji po realnoj p_0 osi uz smenu $p^2-m^2 \to p^2-m^2+i\epsilon$, gde je ϵ mali pozitivan parametar. Prosti polovi su u $p_0 = \pm E_p \mp i\epsilon$. Tako imamo

$$\psi(x) = \frac{g}{(2\pi)^4}\int d^4y \int dp_0 \int d^3p \frac{p\!\!\!/ + m}{p^2-m^2+i\epsilon} e^{-ip(x-y)}\delta(y_0)e^{i\vec{q}\vec{y}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad (6.14\text{-}1)$$

Nakon integracije po y_0 i $\vec{y}$ imamo

$$\psi(x) = \frac{g}{2\pi}\int dp_0 d^3p \frac{p\!\!\!/ + m}{p^2-m^2+i\epsilon} e^{-i(p_0x_0-\vec{p}\vec{x})}\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{q})\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}. \qquad (6.14\text{-}2)$$

Posle integracije po $\vec{p}$ dobijamo

$$\psi(x) = \frac{g}{2\pi}e^{i\vec{q}\vec{x}}\int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \frac{p_0\gamma_0 - \vec{q}\vec{\gamma}+m}{p_0^2-\vec{q}^2-m^2+i\epsilon}e^{-ip_0x_0}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\ . \qquad (6.14\text{-}3)$$

Nakon korišćenja Cauchey-eve teoreme imamo

$$\psi(x) = -\frac{ig}{2E_q}e^{i\vec{q}\vec{x}}\Big[(-E_q\gamma_0 - \vec{q}\vec{\gamma} + m)e^{iE_qx_0}\theta(-x_0) \\ +(E_q\gamma_0 - \vec{q}\vec{\gamma} + m)e^{-iE_qx_0}\theta(x_0)\Big]\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} , \qquad (6.14\text{-}4)$$

što daje

$$\psi(x) = -\frac{ig}{2E_q}e^{i\vec{q}\vec{x}}\left[e^{iE_qx_0}\begin{pmatrix}-E_q+m\\0\\q_3\\q_1+iq_2\end{pmatrix}\theta(-x_0) + e^{-iE_qx_0}\begin{pmatrix}E_q+m\\0\\q_3\\q_1+iq_2\end{pmatrix}\theta(x_0)\right] \qquad (6.14\text{-}5)$$

6.15 Jednačina kretanja slobodnog masenog polja A_μ je

$$(g^{\rho\sigma}\Box - \partial^\rho\partial^\sigma + m^2g^{\rho\sigma})A_\sigma = 0 \, . \qquad (6.15\text{-}1)$$

Green-ova funkcija (koja je zapravo inverzni kinetički operator) definisana je sa

$$(g^{\rho\sigma}\Box - \partial^\rho\partial^\sigma + m^2g^{\rho\sigma})_x G_{\sigma\nu}(x-y) = \delta^{(4)}(x-y)\delta^\rho_\nu \, . \qquad (6.15\text{-}2)$$

Ako uvedemo $G_{\rho\sigma} = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k e^{-ik(x-y)}\tilde{G}_{\rho\sigma}(k)$ u (6.15-2), dobijamo

$$(-k^2g^{\rho\sigma} + k^\rho k^\sigma + m^2g^{\rho\sigma})\tilde{G}_{\sigma\nu} = \delta^\rho_\nu \qquad (6.15\text{-}3)$$

Rešenje jednačine (6.15-3) tražićemo u obliku $\tilde{G}_{\rho\sigma} = Ak^2g_{\rho\sigma} + Bk_\rho k_\sigma$, gde su A i B invarijantne funkcije, tj. zavise samo od k^2 i m^2. Zamenom pretpostavljenog rešenja u (6.15-3) i poređenjem odgovarajućih koeficijenata dobija se

$$A = \frac{1}{-k^4 + k^2m^2} \, , \quad B = -\frac{1}{m^2(m^2-k^2)}$$

što konačno daje

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = \frac{1}{k^2 - m^2}\left(-g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m^2}\right) \, . \qquad (6.15\text{-}4)$$

6.16 Postupajući kao u prethodnom zadatku dobijamo

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = -\frac{g_{\mu\nu}}{k^2} + \frac{1-\lambda}{\lambda k^4}k_\mu k_\nu \, .$$

Rešenja 7

Kanonsko kvantovanje skalarnog polja

7.1 Iz izraza za polje ϕ i kanonski impuls $\pi = \dot\phi$

$$\begin{aligned}\phi &= \int \frac{d^3k}{\sqrt{2(2\pi)^3\omega_k}}\left[a(\vec k)e^{-ikx} + a^\dagger(\vec k)e^{ikx}\right] \ ,\\ \dot\phi &= i\int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}}\omega_k\left[-a(\vec k)e^{-ikx} + a^\dagger(\vec k)e^{ikx}\right] \ ,\end{aligned}$$

imamo

$$\int d^3x\phi(x)e^{-i\vec k'\vec x} = \frac{(2\pi)^{\frac32}}{\sqrt{2\omega_{k'}}}\left[a(\vec k')e^{-i\omega_{k'}t} + a^\dagger(-\vec k')e^{i\omega_{k'}t}\right] \ , \qquad (7.1\text{-}1)$$

$$\int d^3x\dot\phi(x)e^{-i\vec k'\vec x} = i(2\pi)^{\frac32}\sqrt{\frac{\omega_{k'}}{2}}\left[-a(\vec k')e^{-i\omega_{k'}t} + a^\dagger(-\vec k')e^{i\omega_{k'}t}\right] \ . \qquad (7.1\text{-}2)$$

Iz (7.1-1) i (7.1-2) sledi

$$a(\vec k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac32}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\int d^3x e^{ikx}\left[\omega_k\phi(x) + i\dot\phi(x)\right] \ , \qquad (7.1\text{-}3)$$

$$a^\dagger(\vec k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac32}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\int d^3x e^{-ikx}\left[\omega_k\phi(x) - i\dot\phi(x)\right] \ . \qquad (7.1\text{-}4)$$

Koristeći izraze (7.1-3) i (7.1-4) imamo

$$\begin{aligned}[a(\vec k), a^\dagger(\vec k')] = \frac{i}{2(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{\omega_k\omega_{k'}}}\int d^3x d^3y e^{i(kx-k'y)}\Big(&-\omega_k[\phi(x),\dot\phi(y)]\\ &+\omega_{k'}[\dot\phi(x),\phi(y)]\Big)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{\omega_k\omega_{k'}}}\int d^3x e^{i(\omega_k-\omega_{k'})t+i(\vec{k}'-\vec{k})\vec{x}}(\omega_k+\omega_{k'}) \\
&= \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}') \ . \qquad (7.1\text{-}5)
\end{aligned}
$$

Pri dobijanju poslednjeg rezultata koristili smo istovremene komutacione relacije za realno skalarno polje. To smo mogli da uradimo jer kreacioni i anihilacioni operatori zapravo ne zavise od vremena. Direktnim diferenciranjem dobija se

$$
\frac{da(\vec{k})}{dt} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\int d^3x e^{ikx}\left[i\omega_k^2\phi + i\nabla^2\phi - im^2\phi\right] \ .
$$

Ako u drugom sabirku dva puta primenimo parcijalnu integraciju onda, uz relaciju $\omega_k^2 = m^2 + \vec{k}^2$ dobijamo $\frac{da(\vec{k})}{dt} = 0$. Adjungovanjem predhodnog izraza vidimo da ni $a^\dagger(\vec{k})$ ne zavisi od vremena.

Preostala dva komutatora $[a(\vec{k}), a(\vec{k}')] = [a^\dagger(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = 0$, pokazuju se analogno.

7.2 Koeficijenti $a(\vec{k})$ i $a^*(\vec{k})$ ne zavise od vremena, što je pokazano u predhodnom zadatku, stoga ih možemo odrediti na osnovu (7.1-3) odnosno (7.1-4) koristeći $\phi(t=0,\vec{x})$ i $\dot{\phi}(t=0,\vec{x})$. Tako se dobija

$$
a(\vec{k}) = \frac{ic}{\sqrt{2\omega_k}}(2\pi)^{\frac{3}{2}}\delta^{(3)}(\vec{k}) \ .
$$

Skalarno polje je

$$
\phi(t,\vec{x}) = \frac{c}{m}\sin(mt) \ .
$$

Generalno, ako je na nekoj površi, σ prostornog tipa zadato polje i njegov izvod u pravcu normale tada je polje u proizvoljnoj tački dato sa

$$
\phi(y) = -\int_\sigma [\phi(x)\partial_\mu^x\Delta(x-y) - \Delta(y-x)\partial_m\phi(x)]d\sigma^\mu \ .
$$

Rešite ovaj zadatak koristeći gornju formulu.

7.3 Rezultat je

$$
:H: \ = \int d^3k\omega_k(a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k})) \ , \qquad (7.3\text{-}1)
$$

$$
:Q: \ = q\int d^3k\left[a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) - b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k})\right] \ , \qquad (7.3\text{-}2)
$$

$$
:\vec{P}: \ = \int d^3k\vec{k}(a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k})) \ . \qquad (7.3\text{-}3)
$$

7.4 $(u_p, u_k) = \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{p}),\ (u_p, u_k^*) = 0$

7.5 Primenom (2.3-2) imamo

$$\langle 0| H |0\rangle = \frac{1}{2}\delta^{(3)}(0)\int d^3k\sqrt{\vec{k}^2 + m^2} = 2\pi\delta^{(3)}(0)\int_0^\infty dk k^2\sqrt{k^2 + m^2}\ .$$

Poslednji integral se smenom $k = m\sqrt{t}$ svodi na Euler-ovu beta funkciju

$$\langle 0| H |0\rangle = \pi m^4\delta^{(3)}(0)B(\frac{3}{2}, -2) = -\frac{\pi m^4}{4}\delta^{(3)}(0)\Gamma(-2)\ .$$

7.6 Koristićemo izraze za odgovarajuće operatore iz zadatka 7.3 i komutacione relacije iz zadatka 7.1.

(i) Direktnim računom imamo

$$\begin{aligned}
[P^\mu, \phi] &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int \frac{d^3kd^3k'}{\sqrt{2\omega_{k'}}}k^\mu\left[a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}), a(\vec{k'})e^{-ik'x} + a^\dagger(\vec{k'})e^{ik'x}\right] \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}}k^\mu\left(-a(\vec{k})e^{-ikx} + a^\dagger(\vec{k})e^{ikx}\right) \\
&= -i\partial^\mu\phi\ . \qquad (7.6\text{-}1)
\end{aligned}$$

Do istog rezultata može se doći polazeći od zakona transformacije operatora polja ϕ pri translacijama. Naime,

$$\phi(x + \epsilon) = \phi(x) + \epsilon^\mu\partial_\mu\phi\ . \qquad (7.6\text{-}2)$$

Sa druge strane je

$$\phi(x + \epsilon) = e^{i\epsilon P}\phi(x)e^{-i\epsilon P} = \phi(x) + i\epsilon^\mu[P_\mu, \phi(x)] + o(\epsilon)\ . \qquad (7.6\text{-}3)$$

Iz (7.6-2) i (7.6-3) dobija se (7.6-1).

(ii) Prvo pokazati da je $[P_\mu, \phi^a(x)\pi^b(x)] = -i\partial_\mu(\phi^a(x)\pi^b(x))$. Sa druge strane proizvoljna diferencijabilna funkcija $F(\phi, \pi)$ može biti razvijena u red $F(\phi, \pi) = \sum_{a,b} C_{ab}\phi^a\pi^b$. Rezultat je

$$[P_\mu, F(\phi, \pi)] = -i\partial_\mu F\ .$$

(iii) $[H, a^\dagger(\vec{k})a(\vec{q})] = (\omega_k - \omega_q)a^\dagger(\vec{k})a(\vec{q})$

(iv) $[Q, P^\mu] = 0$

(v) $[H, N] = 0$

(vi) $\int d^3x[H,\phi(x)]e^{-ipx} = (2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{\omega_p}{2}}\left(-a(\vec{p})e^{-i\omega_p t} + a^\dagger(-\vec{p})e^{i\omega_p t}\right)$

(vii) Prvo pokazati da je

$$[H,A] = -\int d^3q\omega_q\Big(a(\vec{q})f(\vec{q}) + a^\dagger(\vec{q})f^*(\vec{q})\Big) \ ,$$

$$[[H,A],A] = 2\int d^3q\omega_q|f(\vec{q})|^2$$

$$[\dots[H,A],\dots A] = 0 \ .$$

Primenom Baker-Hausdorff-ove formule dobija se

$$\langle 0|\, e^{-A}He^{A}\,|0\rangle = \int d^3q\omega_q|f(\vec{q})|^2 \ .$$

Stanje $|\psi\rangle = e^A|0\rangle$ naziva se koherentno stanje. Primetimo da kvadrat modula Fourier-ove amplitude klasične funkcije $f(\vec{x})$ na neki način zamenjuje broj čestica u prethodnom izrazu. Koherentno stanje je kvantno stanje koje je "najpribližnije" klasičnom stanju opisanom distribucijom $f(x)$.

7.8 Operator angularnog momenta je

$$M^{\mu\nu} = \int d^3x(x^\mu T^{0\nu} - x^\nu T^{0\mu}) \ .$$

(i) Direktnom zamenom imamo

$$[M_{\mu\nu},\phi(x)] = \int d^3y[y_\mu(\dot{\phi}\partial_\nu\phi - g_{0\nu}\mathcal{L}) - y_\nu(\dot{\phi}\partial_\mu\phi - g_{0\mu}\mathcal{L}),\phi(x)] \ . \quad (7.8\text{-}1)$$

Dalje, lako se pokazuje da važe istovremene komutacione relacije:

$$\begin{aligned}[\mathcal{L}(y),\phi(x)] &= -i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\pi(\vec{y}) \ , \\ [\pi(y)\partial_\mu\phi(y),\phi(x)] &= -i\partial_\mu\phi\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) - i\delta_{\mu 0}\pi(x)\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) \ .\end{aligned}$$

Zamenom poslednja dva izraza u (7.8-1), nakon integracije dobija se

$$[M_{\mu\nu},\phi(x)] = i(x_\nu\partial_\mu - x_\mu\partial_\nu)\phi(x) \ . \quad (7.8\text{-}2)$$

Do istog rezultata možemo doći polazeći od zakona transformacije polja ϕ pri Lorentz-ovim transformacijama

$$e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}}\phi(x)e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}} = \phi(\Lambda^{-1}(\omega)x) \ .$$

(ii) Izračunajmo prvo komutator $[M_{\mu\nu}, P_0]$:

$$
\begin{aligned}
[M_{\mu\nu}, P_0] &= \int d^3x [x_\mu T_{0\nu} - x_\nu T_{0\mu}, P_0] \\
&= \int d^3x \left(x_\mu [T_{0\nu}, P_0] - x_\nu [T_{0\mu}, P_0]\right) \\
&= i \int d^3x \Big(x_\mu \partial_0 T_{0\nu} - x_\nu \partial_0 T_{0\mu}\Big) \\
&= i \int d^3x \left(-x_\mu \partial_i T^i{}_\nu + x_\nu \partial_i T^i{}_\mu\right) \\
&= i \int d^3x \left(g_{\mu i} T^i{}_\nu - g_{i\nu} T^i{}_\mu\right) \\
&= i \int d^3x \left(T_{\mu\nu} - g_{\mu 0} T^0{}_\nu - T_{\nu\mu} + g_{0\nu} T^0{}_\mu\right) \\
&= -i(g_{\mu 0} P_\nu - g_{\nu 0} P_\mu) \ . \qquad (7.8\text{-}3)
\end{aligned}
$$

U (7.8-3) koristili smo zadatak 7.6 (ii); jednačinu kontinuiteta $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$; da bi na kraju izvršili parcijalnu integraciju. Za $\lambda = i$ potrebno je izvršiti parcijalnu integraciju. Rezultat je $[M_{\mu\nu}, P_i] = -i(g_{i\mu} P_\nu - g_{i\nu} P_\mu)$. Dakle,

$$
[M_{\mu\nu}, P_\lambda] = i(g_{\lambda\nu} P_\mu - g_{\lambda\mu} P_\nu) \ . \qquad (7.8\text{-}4)
$$

(iii) Izračunajmo prvo $[M_{ij}, M_{kl}]$. Lako se vidi da je

$$
\begin{aligned}
[M_{ij}, M_{kl}] &= \int d^3x d^3y \Big[x_i \dot\phi(x) \partial_j \phi(x) - x_j \dot\phi(x) \partial_i \phi(x), \\
&\qquad y_k \dot\phi(y) \partial_l \phi(y) - y_l \dot\phi(y) \partial_k \phi(y)\Big] \\
&= \int d^3x d^3y \Big(x_i y_k [\dot\phi(x) \partial_j \phi(x), \dot\phi(y) \partial_l \phi(y)] \\
&\qquad - x_i y_l [\dot\phi(x) \partial_j \phi(x), \dot\phi(y) \partial_k \phi(y)] \\
&\qquad - x_j y_k [\dot\phi(x) \partial_i \phi(x), \dot\phi(y) \partial_l \phi(y)] \\
&\qquad + x_j y_l [\dot\phi(x) \partial_i \phi(x), \dot\phi(y) \partial_k \phi(y)]\Big) \ . \qquad (7.8\text{-}5)
\end{aligned}
$$

Primenom komutacionih relacija između polja, ϕ i impulsa $\pi = \dot\phi$ dobijamo

$$
\begin{aligned}
&[M_{ij}, M_{kl}] = i \int d^3x d^3y \\
&\Big[x_i y_k \left(\dot\phi(x) \partial_l \phi(y) \partial^x_j \delta^{(3)}(\vec x - \vec y) - \dot\phi(y) \partial_j \phi(x) \partial^y_l \delta^{(3)}(\vec x - \vec y)\right) \\
&- x_i y_l \left(\dot\phi(x) \partial_k \phi(y) \partial^x_j \delta^{(3)}(\vec x - \vec y) - \dot\phi(y) \partial_j \phi(x) \partial^y_k \delta^{(3)}(\vec x - \vec y)\right) \\
&- x_j y_k \left(\dot\phi(x) \partial_l \phi(y) \partial^x_i \delta^{(3)}(\vec x - \vec y) - \dot\phi(y) \partial_i \phi(x) \partial^y_l \delta^{(3)}(\vec x - \vec y)\right) \\
&+ x_j y_l \left(\dot\phi(x) \partial_k \phi(y) \partial^x_i \delta^{(3)}(\vec x - \vec y) - \dot\phi(y) \partial_i \phi(x) \partial^y_k \delta^{(3)}(\vec x - \vec y)\right)\Big] \ .
\end{aligned}
$$

Ako dalje iskoristimo relaciju

$$\partial_m^x \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) = -\partial_m^y \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})$$

dobićemo

$$\begin{aligned}
&[M_{ij}, M_{kl}] = -i\int d^3x d^3y \\
&\Big[x_i y_k \left(\dot\phi(x)\partial_l\phi(y)\partial_j^y\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) - \dot\phi(y)\partial_j\phi(x)\partial_l^x\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\right) \\
&-x_i y_l \left(\dot\phi(x)\partial_k\phi(y)\partial_j^y\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) - \dot\phi(y)\partial_j\phi(x)\partial_k^x\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\right) \\
&-x_j y_k \left(\dot\phi(x)\partial_l\phi(y)\partial_i^y\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) - \dot\phi(y)\partial_i\phi(x)\partial_l^x\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\right) \\
&+x_j y_l \left(\dot\phi(x)\partial_k\phi(y)\partial_i^y\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) - \dot\phi(y)\partial_i\phi(x)\partial_k^x\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\right)\Big] .
\end{aligned}$$

Parcijalnom integracijom u poslednjem izrazu dolazimo do

$$\begin{aligned}
[M_{ij}, M_{kl}] &= -i\int d^3x\Big[g_{jk}(x_l\dot\phi(x)\partial_i\phi(x) - x_i\dot\phi(x)\partial_l\phi(x)) \\
&\quad +g_{il}(x_k\dot\phi(x)\partial_j\phi(x) - x_j\dot\phi(x)\partial_k\phi(x)) \\
&\quad +g_{ik}(x_j\dot\phi(x)\partial_l\phi(x) - x_l\dot\phi(x)\partial_j\phi(x)) \\
&\quad +g_{jl}(x_i\dot\phi(x)\partial_k\phi(x) - x_k\dot\phi(x)\partial_i\phi(x))\Big] \\
&= i(g_{jk}M_{il} + g_{li}M_{jk} - g_{ik}M_{jl} - g_{jl}M_{ik}) . \qquad (7.8\text{-}6)
\end{aligned}$$

Preostala dva komutatora $[M_{ij}, M_{0k}]$ i $[M_{0j}, M_{0k}]$ računaju se slično te ih ostavljamo za vežbu.

7.10 Traženi komutator je

$$\begin{aligned}
[Q^a, Q^b] &= -\frac{1}{4}\int d^3x d^3y \tau^a_{ij}\tau^b_{mn} \\
&\quad \left[\dot\phi_i^\dagger(x)\phi_j(x) - \phi_i^\dagger(x)\dot\phi_j(x), \dot\phi_m^\dagger(y)\phi_n(y) - \phi_m^\dagger(y)\dot\phi_n(y)\right] .
\end{aligned}$$

Primenom istovremenih komutacionih relacija dobija se

$$[Q^a, Q^b] = -\frac{i}{4}\int d^3x \left(\dot\phi^\dagger[\tau^a,\tau^b]\phi - \phi^\dagger[\tau^a,\tau^b]\dot\phi\right) .$$

Uz $[\tau^a, \tau^b] = 2i\epsilon^{abc}\tau^c$ dobijamo traženu relaciju.
Kao i u prvom delu zadatka iskoristite istovremene komutacione relacije i izraz za proizvod dva trodimenziona ϵ simbola. Tako dolazimo do komutacionih relacija su(2) algebre, $[Q^a, Q^b] = i\epsilon^{abc}Q^c$.

7.11 Dilataciona struja je

$$j^\mu = \phi\partial^\mu\phi + x^\nu\partial^\mu\phi\partial_\nu\phi - \mathcal{L}x^\mu \ .$$

(i) Generator dilatacija je

$$D = \int d^3x\Big(\dot\phi\phi + x^i\partial_i\phi\dot\phi + \frac{1}{2}x^0((\dot\phi)^2 - \partial_i\phi\partial^i\phi)\Big) \ .$$

(ii) Komutator je

$$\begin{aligned}
[D,\phi(y)] &= \int d^3x[\phi(x)\pi(x) + x^i\pi\partial_i\phi \\
&+ \frac{1}{2}x^0\pi^2 - \frac{1}{2}x^0\partial_i\phi\partial^i\phi, \phi(y)] \\
&= \int d^3x\Big(\phi(x)[\pi(x),\phi(y)] + x^0\pi(x)[\pi(x),\phi(y)] \\
&+ x^i[\pi(x),\phi(y)]\partial_i\phi(x)\Big) \ ,
\end{aligned}$$

gde smo izostavili nulte komutatore. Primenom komutacionih relacija imamo

$$\begin{aligned}
&\rho[D,\phi(y)] = -i\rho(\phi(y) + y^0\pi(y) + y^i\partial_i\phi) \\
&= -i\rho(\phi(y) + y^\mu\partial_\mu\phi(y)) = -i\delta_0\phi \ .
\end{aligned}$$

Slično se pokazuje i

$$\rho[D,\pi(x)] = -i\rho(2\pi + x^\mu\partial_\mu\pi) = -i\delta_0\pi \ .$$

(iii) Na osnovu prethodnog dela zadatka imamo

$$\begin{aligned}
\rho[D,\phi^2] &= \rho([D,\phi]\phi + \phi[D,\phi]) \\
&= -i((\delta_0\phi)\phi + \phi\delta_0\phi) = -i\delta_0(\phi^2) \ ,
\end{aligned}$$

odnosno

$$\rho[D,\phi^a] = -i\delta_0(\phi^a)$$

Slično je i

$$\rho[D,\pi^a] = -i\delta_0(\pi^a) \ .$$

Proizvoljnu analitičku funkciju možemo predstaviti u obliku

$$F(\phi,\pi) = \sum_{ab} c_{ab}\phi^a\pi^b \ ,$$

pa je

$$\begin{aligned}
\rho[D,F] &= \rho\sum_{ab} c_{ab}[D,\phi^a\pi^b] \\
&= \rho\sum_{ab} c_{ab}\Big([D,\phi^a]\pi^b + \phi^b[D,\pi^b]\Big) \\
&= -i\sum_{ab} c_{ab}\Big(\delta_0(\phi^a)\pi^b + \phi^a\delta_0(\pi^b)\Big) \\
&= \delta_0\Big(\sum_{ab} c_{ab}f^a\pi^b\Big) \\
&= -i\delta_0 F \ .
\end{aligned}$$

(iv) Prvo ćemo razmotriti slučaj $\mu = i$:

$$[D,P^i] = \int d^3x[D,\pi\partial^i\phi]$$
$$= \int d^3x\Big(\pi[D,\partial^i\phi] + [D,\pi]\partial^i\phi\Big) \ .$$

Ako dalje iskoristimo (ii) deo ovog zadatka imamo

$$\begin{aligned}
[D,P^i] &= -i\int d^3x\Big(2\pi + x_0\partial_0\pi + x^j\partial_j\pi\Big)\partial^i\phi \\
&+ \pi\Big(2\partial^i\phi + x^0\partial^i\pi + x^j\partial^i\partial_j\phi\Big) \ . \qquad (7.11\text{-}1)
\end{aligned}$$

Primenom Klein-Gordon-ove jednačine $\partial_0\pi = -\partial^i\partial_i\phi$ drugi član u prethodnom izrazu je

$$-\int d^3x x^0\partial_k\partial^k\phi\partial^i\phi = \int d^3x x^0\partial^k\phi\partial_k\partial^i\phi = \frac{1}{2}\int d^3x\partial^i(x^0\partial_k\phi\partial^k\phi) \ ,$$

gde smo u prvom koraku izvršili jednu parcijalnu integraciju. Kao što se vidi ovaj član je površinski i može biti ignorisan. Lako se pokazuje da je i pretposlednji član površinski. Slično je i

$$\int d^3x x^j\partial_j\pi\partial^i\phi = -3\int d^3x\pi\partial^i\phi - \int d^3x x^j\pi\partial_j\partial^i\phi \ .$$

Zamenom poslednjeg izraza u (7.11-1) dobija se

$$[D,P^i] = -iP^i \ .$$

Komutator $[D,P^0] = -iP^0$ pokazuje se slično.

7.12 Prvo pokažite da je

$$\delta_\eta\delta_\chi F = \chi^a\eta^b(FT^bT^a - T^bFT^a - T^aFT^b + T^aT^bF) \ . \qquad (7.12\text{-}1)$$

Primenjujući (7.12-1) dva puta dobija se $[\delta_\eta,\delta_\chi]F = if^{abc}\chi^a\eta^b[F,T^c]$.

7.13 U vakuumsku očekivanu vrednost zamenite izraz za polje ϕ_f gde se ϕ izrazi preko anihilacionih i kreacionih operatora. Od četiri sabirka u dobijenom izrazu jedini nenulti je član proporcionalan sa $\langle 0| a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k'})|0\rangle = \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k'})$. Tako se dolazi do

$$\langle 0|\phi_f(t)\phi_f(t)|0\rangle = \frac{1}{2}\frac{\alpha^3}{(2\pi)^6}\int\frac{d^3k}{\omega_k}\Big(\int d^3x e^{-\frac{\alpha x^2}{2}+i\vec{k}\vec{x}}\Big)^2$$

Integral u zagradi je Poisson-ov integral pa je

$$\begin{aligned}\langle 0|\phi_f(t)\phi_f(t)|0\rangle &= \frac{1}{2(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{\omega_k}e^{-\frac{k^2}{\alpha}}\\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int\frac{k^2dk}{\sqrt{k^2+m^2}}e^{-\frac{k^2}{\alpha}}\end{aligned}$$

Smenom $k^2=t$ poslednji integral postaje

$$\begin{aligned}\langle 0|\phi_f(t)\phi_f(t)|0\rangle &= \frac{1}{8\pi^2}\int_0^\infty\frac{\sqrt{t}dt}{\sqrt{t+m^2}}e^{-t/\alpha}\\ &= \frac{m^2}{16\pi^2}e^{m^2/(2\alpha)}\Big[K_1(\frac{m^2}{2\alpha})-K_0(\frac{m^2}{2\alpha})\Big]\ , \qquad (7.13\text{-}1)\end{aligned}$$

gde su $K_\nu(x)$ modifikovane Bessel-ove funkcije treće vrste. Primenom asimptotskih razvoja:

$$K_1(x)=\frac{1}{x}\ ,$$
$$K_0(x)=-(\log(x/2)+0,5772)$$

za $x\ll 1$ dobijamo

$$\langle 0|\phi_f(t)\phi_f(t)|0\rangle = \frac{\alpha}{8\pi^2}\ ,$$

u limesu $m\to 0$.

7.14 Operatore L_m i L_n izraziti preko operatora α_m^μ i primeniti zadate komutacione relacije.

7.15 Nakon jednostavnog računa dobija se

$$\begin{aligned}\langle 0|\{\phi(x),\phi(y)\}|0\rangle &= \frac{i}{2(2\pi)^2}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^\infty dke^{-\epsilon k}\Big(e^{ik(y^0-x^0-|\vec{x}-\vec{y}|)}\\ &- e^{ik(y^0-x^0+|\vec{x}-\vec{y}|)}+e^{ik(x^0-y^0-|\vec{x}-\vec{y}|)}-e^{ik(x^0-y^0+|\vec{x}-\vec{y}|)}\Big)\ .\end{aligned}$$

Integrale u prethodnom izrazu regularizovali smo uvođenjem ϵ kao regularizacionog parametra. Posle integracije potrebno je da uzmemo da $\epsilon\to 0$. Tako dobijamo

$$\langle 0|\{\phi(x),\phi(y)\}|0\rangle = -\frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{(x-y)^2}\ .$$

7.16 Neposrednim računom se pokazuje da je

$$\begin{aligned}\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\rangle &= \langle\phi(x_1)\phi(x_3)\rangle\langle\phi(x_2)\phi(x_4)\rangle \\ &+ \langle\phi(x_1)\phi(x_4)\rangle\langle\phi(x_2)\phi(x_3)\rangle \\ &+ \langle\phi(x_1)\phi(x_2)\rangle\langle\phi(x_3)\phi(x_4)\rangle \ .\end{aligned}$$

Ovaj rezultat je posledica tzv. Wick-ove teoreme o kojoj će biti reči u desetoj glavi ove zbirke.

7.17 U dve dimenzije realno skalarno polje je

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{\sqrt{(2\pi)2\omega_k}}\Big[a(k)e^{-ik_\mu x^\mu} + a^\dagger(k)e^{ik_\mu x^\mu}\Big] \ ,$$

pa je

$$\langle\phi(x)\phi(y)\rangle = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{|k|}e^{i|k|(y_0-x_0)-ik(y-x)} \ . \qquad (7.17\text{-}1)$$

Ako dalje uvedemo oznake $y_0 - x_0 = \tau$ i $y - x = r$ prethodni integral postaje

$$\langle\phi(x)\phi(y)\rangle = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty}\frac{dk}{k}\Big(e^{ik(\tau-r)} + e^{ik(\tau+r)}\Big) \ . \qquad (7.17\text{-}2)$$

Ako integral u (7.17-2) označimo sa I, onda je

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial\tau} &= \frac{i}{4\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{\infty}dke^{-\epsilon k}\Big(e^{ik(\tau-r)} + e^{ik(\tau+r)}\Big) \\ &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\tau}{\tau^2 - r^2} \ . \end{aligned} \qquad (7.17\text{-}3)$$

Iz (7.17-3) je

$$\langle\phi(x)\phi(y)\rangle = -\frac{1}{4\pi}\log\frac{\tau^2 - r^2}{\mu^2} = -\frac{1}{4\pi}\log\frac{(x-y)^2}{\mu^2} \ ,$$

gde je μ integraciona konstanta koja ima dimenzije dužine.

7.18 Diferenciranjem $\langle 0|\, T(\phi(x)\phi(y))\,|0\rangle$ po x_0 dobija se

$$\begin{aligned}&\partial_{x_0}\langle 0|\, T(\phi(x)\phi(y))\,|0\rangle = \delta(x_0 - y_0)\langle 0|\,[\phi(x),\phi(y)]\,|0\rangle \\ &+ \ \theta(x_0 - y_0)\langle 0|\,\partial_{x_0}\phi(x)\phi(y)\,|0\rangle + \theta(y_0 - x_0)\langle 0|\,\phi(y)\partial_{x_0}\phi(x)\,|0\rangle \ .\end{aligned}$$

Prvi sabirak je jednak nuli zbog istovremenih komutacionih relacija. Još jednim diferenciranjem po x_0 dobija se

$$\begin{aligned}\partial^2_{x^0}\langle 0|\, T(\phi(x)\phi(y))\,|0\rangle &= \delta(x^0 - y^0)[\pi(x),\phi(y)] \\ &+ \theta(x^0 - y^0)\langle 0|\,\partial^2_{x^0}\phi(x)\phi(y)\,|0\rangle \\ &+ \theta(y^0 - x^0)\langle 0|\,\phi(y)\partial^2_{x^0}\phi(x)\,|0\rangle \ .\end{aligned}$$

U prvom članu možemo da primenimo istovremene komutacione relacije. Tako dolazimo do

$$\begin{aligned}\partial^2_{x^0}\langle 0|\,T(\phi(x)\phi(y))\,|0\rangle &= -i\delta^{(4)}(x-y)\\ &+\ \theta(x^0-y^0)\,\langle 0|\,\partial^2_{x^0}\phi(x)\phi(y)\,|0\rangle\\ &+\ \theta(y^0-x^0)\,\langle 0|\,\phi(y)\partial^2_{x^0}\phi(x)\,|0\rangle\ .\end{aligned}$$

Na osnovu predthodnog izraza imamo

$$\begin{aligned}(\Box_x+m^2)\,\langle 0|\,T(\phi(x)\phi(y))\,|0\rangle &= -i\delta^{(4))}(x-y)\\ &+\ \theta(x_0-y_0)\,\langle 0|\,(\Box_x+m^2)\phi(x)\phi(y)\,|0\rangle\\ &+\ \theta(y_0-x_0)\,\langle 0|\,\phi(y)(\Box_x+m^2)\phi(x)\,|0\rangle\ ,\end{aligned}$$

odakle imamo

$$(\Box_x+m^2)\,\langle 0|\,T(\phi(x)\phi(y))\,|0\rangle = -i\delta^{(4))}(x-y)\ . \tag{7.18-1}$$

7.19 (i) Zamenjujući izraz za ϕ u $U(\Lambda,a)\phi(x)U^{-1}(\Lambda,a)=\phi(\Lambda x+a)$ dobija se

$$\begin{aligned}&\int\frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega_k}}U(\Lambda,a)\Big(a(\vec{k})e^{-ikx}+a^\dagger(\vec{k})e^{ikx}\Big)U^{-1}(\Lambda,a)\\ &=\int\frac{d^3k'}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega_{k'}}}\Big(a(\vec{k}')e^{-ik'\cdot(\Lambda x+a)}+a^\dagger(\vec{k}')e^{ik'\cdot(\Lambda x+a)}\Big)\ .\end{aligned} \tag{7.19-1}$$

U integralu na desnoj strani (7.19-1) potrebno je uvesti smenu $k'^\mu\Lambda_\mu^{\ \nu}=k^\nu$. Kako je $d^3k/(2\omega_k)$ Lorentz-invarijantna mera (zadatak 6.3) to je

$$\frac{d^3k'}{\sqrt{2\omega_{k'}}}=\sqrt{\frac{\omega_{k'}}{2}}\frac{d^3k}{\omega_k}\ .$$

Primenom inverzne Fourier-ove transformacije slede tražene relacije.

(ii) Lako se vidi da je

$$\begin{aligned}U(\Lambda,a)\,|k_1,\ldots,k_n\rangle &= U(\Lambda,a)a^\dagger(\vec{k}_1)U^{-1}(\Lambda,a)U(\Lambda,a)\cdots\\ &\quad\cdots U(\Lambda,a)a^\dagger(\vec{k}_n)U^{-1}(\Lambda,a)\,|0\rangle\\ &= \sqrt{\frac{\omega_{k_1'}\cdots\omega_{k_n'}}{\omega_{k_1}\cdots\omega_{k_n}}}e^{ia_\mu\Lambda^\mu{}_\nu(k_1^\nu+\ldots+k_n^\nu)}\,|\Lambda k_1,\ldots,\Lambda k_n\rangle\ .\end{aligned}$$

(iii) Na osnovu izraza (7.3-1) i (7.3-3) i (i) dela ovog zadatka imamo

$$\begin{aligned}U(\Lambda)P^\mu U^{-1}(\Lambda) &= \int d^3k k^\mu U(\Lambda)a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k})U^{-1}(\Lambda)\\ &= \int d^3k k^\mu\frac{\omega_{k'}}{\omega_k}a^\dagger(\Lambda k)a(\Lambda k)\\ &= \Lambda_\nu{}^\mu\int d^3k'k'^\nu a^\dagger(\vec{k}')a(\vec{k}')\\ &= \Lambda_\nu{}^\mu P^\nu\ ,\end{aligned}$$

gde smo u drugom redu uveli smenu $k^\mu = \Lambda_\nu{}^\mu k'^\nu$ u integralu.

(iv) Prvo pokazati da je $U(\Lambda)[\phi(x), \phi(y)]U^{-1}(\Lambda) = [\phi(\Lambda x), \phi(\Lambda x)]$, a zatim da je $[\phi(x), \phi(y)] = i\Delta(x-y)$. Takođe proveriti, na osnovu integralnog izraza-zadatak (6) da je $\Delta(\Lambda x - \Lambda y) = \Delta(x-y)$.

7.20 (i) U zadatku 7.3 dobili smo energiju skalarnog polja

$$H = \int d^3k\omega_k a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k})$$

pa je

$$PHP^{-1} = e^A He^{-A} = H + [A,H] + \frac{1}{2}[A,[A,H]] + \dots\ ,$$

gde je $A = \frac{-i\pi}{2}\int d^3q\Big(a^\dagger(\vec{q})a(\vec{q}) - a^\dagger(\vec{q})a(-\vec{q})\Big)$. Prvi komutator je

$$[A,H] = -\frac{i\pi}{2}\int d^3k\omega_k\Big(a^\dagger(\vec{k})a(-\vec{k}) - a^\dagger(-\vec{k})a(\vec{k})\Big)\ .$$

Nakon smene $\vec{k} \to -\vec{k}$ u drugom integralu dobijamo $[A,H] = 0$. Jasno je da su i ostali komutatori u (20) nula pa je

$$[P,H] = 0,$$

što je traženi rezultat.

(ii) Poći od rešenja zadatka 7.8 i primeniti sličan metod kao u prvom delu ovog zadatka.

7.21 $\tau\vec{P}\tau^{-1} = -\vec{P},\ \tau H\tau^{-1} = H$

7.22 Pokazati prvo da je $C\phi^\dagger C^{-1} = \eta_c^*\phi$, $C\pi C^{-1} = \eta_c\pi^\dagger$ i $C\pi^\dagger C^{-1} = \eta_c\pi$.

Kanonsko kvantovanje Dirac-ovog polja

8.1 Primenom datih antikomutacionih relacija antikomutator $iS_{ab}(x-y) = \{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\}$, gde $a, b = 1, .., 4$ postaje

$$\begin{aligned}\{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\} &= \sum_{r,s} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p d^3q \frac{m}{\sqrt{E_p E_q}} \delta_{rs} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \\ &\Big(u_a(\vec{p}, r)\bar{u}_b(\vec{q}, s)e^{i(qy-px)} + v_a(\vec{p}, r)\bar{v}_b(\vec{q}, s)e^{-i(qy-px)} \Big) \ .\end{aligned}$$

Primenom zadatka 4.4 imamo

$$\begin{aligned}\{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E_p} \\ &\Big[(\not{p} + m)_{ab} e^{-ip(x-y)} + (\not{p} - m)_{ab} e^{ip(x-y)} \Big] \ . \qquad (8.1\text{-}1)\end{aligned}$$

Poslednji izraz se lako prepisuje u obliku

$$\{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\} = (i\gamma^\mu \partial_\mu^x + m)_{ab} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E_p} \Big[e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)} \Big] \ , \qquad (8.1\text{-}2)$$

odakle vidimo da je $\Delta(x-y)$ dato u zadatku 6.6. U slučaju $x_0 = y_0$ potrebno je da u drugom članu izraza (8.1-1) napravimo smenu $\vec{p} \to -\vec{p}$ nakon koje dobijamo

$$\{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\}|_{x_0=y_0} = (\gamma^0)_{ab} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} = (\gamma^0)_{ab} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \ . \qquad (8.1\text{-}3)$$

8.2 (i) Na osnovu drugog dela zadatka 4.28 i primenom normalnog uređenja dobija se traženi rezultat. Da smo u procesu kvantovanja spinorskog polja koristili komutacione umesto antikomutacionih relacija za energiju polja dobili bi

$$H = \sum_r \int d^3p E_p \Big(c^\dagger(\vec{p}, r) c(\vec{p}, r) - d^\dagger(\vec{p}, r) d(\vec{p}, r) \Big) \ ,$$

odakle vidimo da spektar energije ne bi bio ograničen sa donje strane što je fizički neprihvatljivo.

(ii) Lako se vidi da je

$$\begin{aligned}
[H, \psi] &= \sum_{r,s} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p d^3q E_p \sqrt{\frac{m}{E_q}} [c^\dagger(\vec{p}, r) c(\vec{p}, r) \\
&+ d^\dagger(\vec{p}, r) d(\vec{p}, r), c(\vec{q}, s) u(\vec{q}, s) e^{-iqx} + d^\dagger(\vec{q}, s) v(\vec{q}, s) e^{iqx}] \\
&= \sum_{r,s} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3p d^3q E_p \sqrt{\frac{m}{E_q}} \delta_{rs} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) [-c(\vec{p}, r) u(\vec{q}, s) e^{-iqx} \\
&+ d^\dagger(\vec{p}, r) v(\vec{q}, r) e^{iqx}] = \sum_r \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{m E_p} \Big[- c(\vec{p}, r) u(\vec{p}, r) e^{-ipx} \\
&+ d^\dagger(\vec{p}, r) v(\vec{p}, r) e^{ipx} \Big] \\
&= -i \frac{\partial \psi}{\partial t} \ .
\end{aligned}$$

8.3 $[H, c^\dagger(\vec{p}, r) c(\vec{p}, r)] = 0$

8.4 Varijacija forme spinorskog polja je

$$\begin{aligned}
\delta_0 \psi &= \delta\psi - \delta x^\mu \partial_\mu \psi = \\
&= -\frac{i}{4} \omega^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \psi - \omega^{\mu\nu} x_\nu \partial_\mu \psi = \\
&= \frac{1}{2} \omega^{\mu\nu} \Big(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu - \frac{i}{2} \sigma_{\mu\nu} \Big) \psi \ .
\end{aligned}$$

Sa druge strane je $\delta_0 \psi = -\frac{i}{2} \omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu} \psi$ odakle se dobija traženi izraz za generatore.

8.5 (i) Primenom $[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B$ dobija se

$$\begin{aligned}[M_{\mu\nu}, \psi_a(x)] &= \int d^3y \Big[\psi_b^\dagger(y)\Big(i(y_\mu\partial_\nu - y_\nu\partial_\mu) + \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}\Big)_{bc}\psi_c(y), \psi_a(x)\Big] \\ &= -\int d^3y \{\psi_b^\dagger(y), \psi_a(x)\}\Big(i(y_\mu\partial_\nu - y_\nu\partial_\mu) + \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}\Big)_{bc}\psi_c(y) \ .\end{aligned}$$

Primenom istovremenih antikomutacionih relacija

$$\{\psi_b^\dagger(y), \psi_a(x)\}|_{x_0=y_0} = \delta_{ab}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$$

dobija se traženi rezultat. On je posledica zakona transformacije spinorskog polja pri Lorentz-ovim transformacijama.

(ii) Zamenjujući izraze za angularni moment i impuls Dirac-ovog polja dobijamo

$$\begin{aligned}[M_{\mu\nu}, P_\rho] = i\int d^3x d^3y \Big[\psi_a^\dagger(x)\Big(i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) \\ + \ \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}\Big)_{ab}\psi_b(x), \psi_c^\dagger(y)\partial_\rho\psi_c(y)\Big] \ .\end{aligned}$$

Primenom antikomutacionih relacija imamo

$$\begin{aligned}[M_{\mu\nu}, P_\rho] &= i\int d^3x d^3y \Big(\psi_a^\dagger(x)\Big(i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) \\ &+ \ \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}\Big)_{ab}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})\partial_\rho\psi_b(y) \\ &- \ \psi_c^\dagger(y)\partial_\rho^y\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})\delta_{ac}(i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) + \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu})_{ab}\psi_b(x)\Big) \ .\end{aligned}$$

Dalje ćemo analizirati slučaj $\mu = i, \nu = j, \ \rho = k$. Poslednji izraz postaje

$$[M_{ij}, P_k] = i\int d^3x \Big(ig_{jk}\psi^\dagger\partial_i\psi - ig_{ik}\psi^\dagger\partial_j\psi\Big) \ ,$$

gde smo izvršili integraciju po $\vec{y}$. Lako se vidi da je

$$[M_{ij}, P_k] = i(g_{jk}P_i - g_{ik}P_j).$$

Preostali slučajevi pokazuju se analogno.

8.6 Operator heliciteta je

$$S_p = \frac{1}{2}\int d^3x : \psi^\dagger\frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{|\vec{p}|}\psi : \tag{8.6-1}$$

Zamenom izraza za polja ψ i $\psi^\dagger$ u prethodnom izrazu, nakon množenja, normalnog uređenja i korišćenjem činjenice da su $u_r(\vec{p})$ i $v_r(\vec{p})$ svojstveni spinori operatora $\vec{\Sigma}\vec{p}/|\vec{p}|$ sa svojstvenim vrednostima $(-1)^{r+1}$, $(-1)^r$ respektivno (zadatak 4.7) imamo

$$\begin{aligned} S_p = \frac{1}{2(2\pi)^3}\int d^3x \sum_{r,s=1}^{2} & \int d^3p d^3q \frac{m}{\sqrt{E_p E_q}} \\ & \Big[c_r^\dagger(\vec{q})c_s(\vec{p})(-1)^{s+1}u_r^\dagger(\vec{q})u_s(\vec{p})e^{i(q-p)x} \\ & + c_r^\dagger(\vec{q})d_s^\dagger(\vec{p})(-1)^{s}u_r^\dagger(\vec{q})v_s(\vec{p})e^{i(q+p)x} \\ & + d_r(\vec{q})c_s(\vec{p})(-1)^{s+1}v_r^\dagger(\vec{q})u_s(\vec{p})e^{-i(q+p)x} \\ & - d_s^\dagger(\vec{p})d_r(\vec{q})(-1)^{s}v_r^\dagger(\vec{q})v_s(\vec{p})e^{i(p-q)x}\Big] \ . \end{aligned} \tag{8.6-2}$$

Integracijom po $\vec{x}$ i primenom relacija otrogonalnosti

$$u_r^\dagger(\vec{p})u_s(\vec{p}) = v_r^\dagger(\vec{p})v_s(\vec{p}) = \frac{E_p}{m}\delta_{rs}, \ u_r^\dagger(\vec{p})u_s(-\vec{p}) = 0 \ , \tag{8.6-3}$$

preostaće samo prvi i poslednji sabirak u (8.6-2). Integracija po $\vec{q}$ daje

$$S_p = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{2}\int d^3p(-1)^{r+1}\Big(c_r^\dagger(\vec{p})c_r(\vec{p}) + d_r^\dagger(\vec{p})d_r(\vec{p})\Big) \ . \tag{8.6-4}$$

8.7 Zadato dvočestično stanje je svojstveno stanje pomenutih operatora. Primenom izraza za hamiltonijan iz zadatka 8.2 imamo

$$\begin{aligned} & H \ c^\dagger(\vec{p}_1, r_1)c^\dagger(\vec{p}_2, r_2)\,|0\rangle \\ = & \sum_r \int d^3p E_p\Big(c_r^\dagger(\vec{p})c_r(\vec{p}) \\ & +d_r^\dagger(\vec{p})d_r(\vec{p})\Big)c_{r_1}^\dagger(\vec{p})c_{r_2}^\dagger(\vec{p})\,|0\rangle \ . \end{aligned} \tag{8.7-1}$$

Komutiranjem $c_r(\vec{p})$ sa $c_{r_1}(\vec{p}_1)$ imamo

$$\begin{aligned} & c_r^\dagger(\vec{p})c_r(\vec{p})c_{r_1}^\dagger(\vec{p}_1)c_{r_2}^\dagger(\vec{p}_2)\,|0\rangle \\ = & \ \delta_{r_1 r}\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}_1)c_r^\dagger(\vec{p})c_{r_2}^\dagger(\vec{p}_2)\,|0\rangle \\ - & \ c_r^\dagger(\vec{p})c_{r_1}^\dagger(\vec{p}_1)c_r(\vec{p})c_{r_2}^\dagger(\vec{p}_2)\,|0\rangle \ . \end{aligned} \tag{8.7-2}$$

Komutiranjem $c_r(\vec{p})$ sa $c_{r_2}^\dagger(\vec{p}_2)$ u drugom članu dolazimo do

$$\begin{aligned} & c_r^\dagger(\vec{p})c_r(\vec{p})c_{r_1}^\dagger(\vec{p}_1)c_{r_2}^\dagger(\vec{p}_2)\,|0\rangle \\ = & \ \delta_{r_1 r}\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}_1)c_r^\dagger(\vec{p})c_{r_2}^\dagger(\vec{p}_2)\,|0\rangle - c_r^\dagger(\vec{p})c_{r_1}^\dagger(\vec{p}_1)\delta_{r r_2}\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}_2)\,|0\rangle \end{aligned} \tag{8.7-3}$$

Lako se vidi da je

$$d_r^\dagger(\vec{p})d_r(\vec{p})c_{r_1}^\dagger(\vec{p}_1)c_{r_2}^\dagger(\vec{p}_2)\,|0\rangle = 0 \ . \tag{8.7-4}$$

Zamenom (8.7-3) i (8.7-4) u (8.7-1) nakon integracije po $\vec{p}$ imamo

$$Hc^\dagger(\vec{p}_1, r_1)c^\dagger(\vec{p}_2, r_2)\,|0\rangle = (E_{p_1} + E_{p_2})c^\dagger(\vec{p}_1, r_1)c^\dagger(\vec{p}_2, r_2)\,|0\rangle \ . \tag{8.7-5}$$

Slično se dobijaju i vrednosti za naelektrisanje:

$$Qc^\dagger(\vec{p}_1, r_1)c^\dagger(\vec{p}_2, r_2)\,|0\rangle = 2ec^\dagger(\vec{p}_1, r_1)c^\dagger(\vec{p}_2, r_2)\,|0\rangle \ , \tag{8.7-6}$$

i helicitet

$$\begin{aligned} & S_p \ c^\dagger(\vec{p}_1, r_1)c^\dagger(\vec{p}_2, r_2)\,|0\rangle \\ = \ & \frac{1}{2}\Big((-1)^{r_1+1} + (-1)^{r_2+1}\Big)c^\dagger(\vec{p}_1, r_1)c^\dagger(\vec{p}_2, r_2)\,|0\rangle \ . \end{aligned} \tag{8.7-7}$$

Dakle, energija, naelektrisanje i helicitet stanja $|\vec{p}_1, r_1; \vec{p}_2, r_2\rangle$ su

$$E_{p_1} + E_{p_2}, \ 2e, \ \frac{1}{2}\Big((-1)^{r_1+1} + (-1)^{r_2+1}\Big) \ , \tag{8.7-8}$$

respektivno.

8.8 Traženi komutator je

$$\begin{aligned} [Q^a, Q^b] \ &= \frac{1}{4}\int d^3x d^3y \tau^a_{ij}\tau^b_{kl}[\psi^\dagger_i(x)\psi_j(x), \psi^\dagger_k(y)\psi_l(y)] \\ &= \frac{1}{4}\int d^3x d^3y \tau^a_{ij}\tau^b_{kl}(\psi^\dagger_i(x)\psi_l(y)\delta_{jk} - \psi^\dagger_k(y)\psi_j(x)\delta_{il})\delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ &= \frac{1}{4}\int d^3x (\psi^\dagger_i \tau^a_{ij}\tau^b_{jl}\psi_l - \psi^\dagger_i \tau^b_{ij}\tau^a_{jl}\psi_l) \\ &= \frac{1}{4}\int d^3x \psi^\dagger[\tau^a, \tau^b]\psi \\ &= \frac{i}{2}\epsilon^{abc}\int d^3x \psi^\dagger\tau^c\psi = i\epsilon^{abc}Q^c \ . \end{aligned}$$

Generatori Q^a zadovoljavaju komutacione relacije $su(2)$ algebre kao što smo očekivali.

8.9 Naboj koji odgovara dilatacionoj struji nađenoj u zadatku 5.18 je

$$D = \int d^3x j^0 = i\int d^3x \Big(\frac{3}{2}\psi^\dagger\psi + x^j\psi^\dagger\partial_j\psi - x^0\bar{\psi}\gamma^j\partial_j\psi\Big) \ . \tag{8.9-1}$$

Izračunaćemo komutator operatora D sa operatorom tro-impulsa, P^i

$$\begin{aligned} [D, P^i] \ = \ & -\int d^3x d^3y \Big[\frac{3}{2}\psi^\dagger(x)\psi(x) + x^j\psi^\dagger(x)\partial_j\psi(x) \\ & - \ x^0\bar{\psi}(x)\gamma^j\partial_j\psi(x), \psi^\dagger(y)\partial^i\psi(y)\Big] \ . \end{aligned} \tag{8.9-2}$$

Prethodni izraz rastavićemo na tri komutatora. Prvi od njih je

$$\begin{aligned}[\psi^\dagger(x)\psi(x),\psi^\dagger(y)\partial^i\psi(y)] &= [\psi_a^\dagger(x)\psi_a(x),\psi_b^\dagger(y)]\partial^i\psi_b(y)\\ &+ \psi_b^\dagger(y)[\psi_a^\dagger(x)\psi_a(x),\partial^i\psi_b(y)]\\ &= \psi_a^\dagger(x)\{\psi_a(x),\psi_b^\dagger(y)\}\partial^i\psi_b(y)\\ &- \psi_b^\dagger(y)\{\psi_a^\dagger(x),\partial^i\psi_b(y)\}\psi_a(x)\ ,\end{aligned}$$

gde smo izostavili nulte antikomutatore. Antikomutacione relacije daju

$$\begin{aligned}&[\psi^\dagger(x)\psi(x),\psi^\dagger(y)\partial^i\psi(y)]\\ &= \psi^\dagger(x)\partial^i\psi(y)\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})-\psi^\dagger(y)\psi(x)\partial_y^i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\ .\end{aligned} \tag{8.9-3}$$

Preostala dva komutatora računaju se slično:

$$\begin{aligned}&[\psi^\dagger(x)\partial_j\psi(x),\psi^\dagger(y)\partial^i\psi(y)]\\ &= \psi^\dagger(x)\partial^i\psi(y)\partial_j^x\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\\ &- \psi^\dagger(y)\partial_j\psi(x)\partial_y^i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\ ,\end{aligned} \tag{8.9-4}$$

$$\begin{aligned}&[\bar\psi(x)\gamma^j\partial_j\psi(x),\psi^\dagger(y)\partial^i\psi(y)]\\ &= \bar\psi(x)\gamma^i\partial_i\psi(y)\partial_j^x\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\\ &- \bar\psi(y)\gamma^i\partial_j\psi(x)\partial_y^i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\ .\end{aligned} \tag{8.9-5}$$

Zamenom (8.9-3), (8.9-4) i (8.9-5) u (8.9-2) uz primenu

$$\partial_x^k\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) = -\partial_y^k\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) \tag{8.9-6}$$

i parcijalnu integraciju dolazimo do

$$[D,P^i] = \int d^3x\psi^\dagger\partial^i\psi = -iP^i\ . \tag{8.9-7}$$

Slično se pokazuje i

$$[D,P^0] = -iP^0\ . \tag{8.9-8}$$

8.10 (i) Primenom jednačine (5.G) za tenzor energije implulsa dobijamo

$$T_{\alpha\beta} = i\bar\psi\gamma_\alpha\partial_\beta\psi - g_{\alpha\beta}(i\bar\psi\partial\!\!\!/\psi - gx^2\bar\psi\psi)\ .$$

Diferenciranjem prethodnog izraza, uz primenu jednačina kretanja, lako se dobija

$$\partial^\alpha T_{\alpha\beta} = 2gx_\beta\bar\psi\psi\ .$$

Činjenica da je $\partial^\alpha T_{\alpha\beta}\neq 0$ ukazuje na to da teorija nije translaciono invarijantna, što se vidi direktno iz lagranžijana. Energija i impuls nisu očuvani u ovoj teoriji.

(ii) Po definiciji imamo

$$P^0(t) = \int d^3x(-i\bar{\psi}\gamma^j\partial_j\psi + gx^2\bar{\psi}\psi) \ ,$$

$$P^i(t) = i\int d^3x\psi^\dagger\partial^i\psi \ ,$$

pa je

$$\begin{aligned}
[P^0(t), P^i(t)] &= \iint d^3xd^3y\Big([\bar{\psi}(t,\vec{x})\gamma^j\partial_j\psi(t,\vec{x}), \psi^\dagger(t,\vec{y})\partial^i\psi(t,\vec{y})] \\
&+ igx^2[\bar{\psi}(t,\vec{x})\psi(t,\vec{x}), \psi^\dagger(t,\vec{y})\partial^i\psi(t,\vec{y})]\Big) \\
&= \iint d^3xd^3y\Big((\gamma^0\gamma^j)_{ab}[\psi^\dagger_a(t,\vec{x})\partial_j\psi_b(t,\vec{x}), \psi^\dagger_c(t,\vec{y})\partial^i\psi_c(t,\vec{y})] \\
&+ igx^2\gamma^0_{ab}[\psi^\dagger_a(t,\vec{x})\psi_b(t,\vec{x}), \psi^\dagger_c(t,\vec{y})\partial^i\psi_c(t,\vec{y})]\Big) \ .
\end{aligned}$$

Komutatori u prethodnom izrazu nalaze se slično kao u prethodnom zadatku pa je

$$\begin{aligned}
[P^0(t), P^i(t)] &= \int d^3x\Big(-\partial_j\bar{\psi}\gamma^j\partial^i\psi + \partial^i\bar{\psi}\gamma^j\partial_j\psi \\
&+ igx^2(\bar{\psi}\partial^i\psi + \partial^i\bar{\psi}\psi)\Big) \\
&= \int d^3x(-\partial_j(\bar{\psi}\gamma^j\partial^i\psi) + igx^2\partial^i(\bar{\psi}\psi)) \\
&= -2ig\int d^3xx^i\bar{\psi}\psi \ ,
\end{aligned}$$

gde smo odbacili članove koji su totalne divergencije.

(iii) Lako se dobija $\partial_\mu M^{\mu\nu\rho} = 0$, što je posledica Lorentz-ove invarijantnosti teorije.

8.11 (i) Pod dejstvom Lorentz-ovih transformacija na komutator dobijamo

$$\begin{aligned}
&U(\Lambda)[J^\mu(x), J^\nu(y)]U^{-1}(\Lambda) \\
&= U(\Lambda)[\bar{\psi}_a(x)\gamma^\mu_{ab}\psi_b(x), \bar{\psi}_c(y)\gamma^\nu_{cd}\psi_d(y)]U^{-1}(\Lambda) \qquad (8.11\text{-}1) \\
&= [U\bar{\psi}_a(x)U^{-1}\gamma^\mu_{ab}U\psi_b(x)U^{-1}, U\bar{\psi}_c(y)U^{-1}\gamma^\nu_{cd}U\psi_d(y)U^{-1}] \ .
\end{aligned}$$

Ako dalje iskoristimo relacije

$$U(\Lambda)\psi(x)U^{-1}(\Lambda) = S^{-1}(\Lambda)\psi(\Lambda x), \qquad (8.11\text{-}2)$$

$$U(\Lambda)\bar{\psi}(x)U^{-1}(\Lambda) = \bar{\psi}(\Lambda x)S(\Lambda) \qquad (8.11\text{-}3)$$

i $S^{-1}\gamma^\mu S = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu$ iz (8.11-1) dobijamo

$$U(\Lambda)[J^\mu(x), J^\nu(y)]U^{-1}(\Lambda) = \Lambda_\rho{}^\mu\Lambda_\sigma{}^\nu[J^\rho(\Lambda x), J^\nu(\Lambda y)] \ , \qquad (8.11\text{-}4)$$

čime smo pokazali da je dati komutator Lorentz kovarijantan.

(ii) Zbog kovarijantnosti datog komutatora možemo preći u sistem gde je $x^0 = y^0 = t,\ \vec{x} \neq \vec{y}$. Tako imamo

$$\begin{aligned}
& [J_\mu(t,\vec{x}), J_\nu(t,\vec{y})] \\
= \;& (\gamma_0\gamma_\mu)_{ab}(\gamma_0\gamma_\nu)_{cd}[\psi_a^\dagger(t,\vec{x})\psi_b(t,\vec{x}), \psi_c^\dagger(t,\vec{y})\psi_d(t,\vec{y})] \\
= \;& (\gamma_0\gamma_\mu)_{ab}(\gamma_0\gamma_\nu)_{cd}\Big(\psi_a^\dagger(t,\vec{x})\{\psi_b(t,\vec{x}), \psi_c^\dagger(t,\vec{y})\}\psi_d(t,\vec{y}) \\
- \;& \psi_c^\dagger(t,\vec{y})\{\psi_a^\dagger(t,\vec{x}), \psi_d(t,\vec{y})\}\psi_b(t,\vec{x})\Big) \;. \qquad (8.11\text{-}5)
\end{aligned}$$

Primenom antikomutacionih relacija u poslednjem redu (8.11-5) dobijamo

$$\begin{aligned}
& [J_\mu(t,\vec{x}), J_\nu(t,\vec{y})] \\
= \;& \Big(\bar\psi(t,\vec{x})\gamma_\mu\gamma_0\gamma_\nu\psi(t,\vec{x}) - \bar\psi(t,\vec{x})\gamma_\nu\gamma_0\gamma_\mu\psi(t,\vec{x})\Big)\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})
\end{aligned}$$

Kako je $\vec{x} \neq \vec{y}$ to je $\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) = 0$. Na osnovu kovarijantnosti zaključujemo da je $[J_\mu(x), J_\nu(y)] = 0$, tj. važi princip mikrokauzalnosti.

(iii) Prvo pokažite da je

$$[\psi_a(x), \bar\psi_b(y)] = (i\partial\!\!\!/_x + m)i\Delta_1(x-y) \;,$$

gde je

$$i\Delta_1(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2E_p}\left(e^{ip\cdot(x-y)} + e^{ip\cdot(x-y)}\right) \;.$$

Integracija po polarnim uglovima (u slučaju $x_0 = y_0$) daje

$$i\Delta_1(0,\vec{x}-\vec{y}) = \frac{1}{2\pi^2 r}\int_0^\infty \frac{dp\; p\sin(pr)}{\sqrt{p^2+m^2}} \;,$$

gde je $r = |\vec{x}-\vec{y}|$. Smenom $p = m\sinh u$ poslednji integral postaje

$$i\Delta_1(0,r) = \frac{m}{2\pi^2 r}\int_0^\infty du \sinh u \sin(rm\sinh u) = \frac{m}{2\pi^2 r}K_1(mr) \;.$$

Dakle $i\Delta_1(0,\vec{x}-\vec{y}) \neq 0$ odakle sledi da rezultat iz prethodnog dela zadatka ne važi.

8.12 Pokažimo prvo sledeće VOV

$$\Big\langle \psi_a(x)\bar\psi_b(y)\Big\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2E_p}(p\!\!\!/ + m)_{ab}e^{-ip(x-y)} \;, \qquad (8.12\text{-}1)$$

$$\Big\langle \bar\psi_a(x)\psi_b(y)\Big\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2E_p}(p\!\!\!/ - m)_{ba}e^{-ip(x-y)} \;. \qquad (8.12\text{-}2)$$

Ako u izraz za $\left\langle\bar{\psi}_a(x_1)\psi_b(x_2)\psi_c(x_3)\bar{\psi}_d(x_4)\right\rangle$ zamenimo izraze za Dirac-ova polja, ψ i $\bar{\psi}$ dobijamo

$$\begin{aligned}
&\left\langle\bar{\psi}_a(x_1)\psi_b(x_2)\psi_c(x_3)\bar{\psi}_d(x_4)\right\rangle \\
= &\sum_{r_1,..r_4}\frac{m^2}{(2\pi)^6}\int\prod_{i=1}^{4}\frac{d^3p_i}{\sqrt{E_{p_i}}} \\
&\left(\left\langle d_1c_2d_3^\dagger c_4^\dagger\right\rangle\bar{v}_{1a}u_{2b}v_{3c}\bar{u}_{4d}e^{i(-p_1x_1-p_2x_2+p_3x_3+p_4x_4)}\right. \\
+ &\left.\left\langle d_1d_2^\dagger c_3c_4^\dagger\right\rangle\bar{v}_{1a}v_{2b}u_{3c}\bar{u}_{4d}e^{i(-p_1x_1+p_2x_2-p_3x_3+p_4x_4)}\right)\ ,
\end{aligned}$$

gde smo izostavili nulte članove. Takođe, koristili smo notaciju

$$d_1 = d_{r_1}(\vec{p}_1), u_1 = u_{r_1}(\vec{p}_1)$$

i slično. Kako je

$$\left\langle d_1c_2d_3^\dagger c_4^\dagger\right\rangle = -\delta_{r_1r_3}\delta_{r_2r_4}\delta^{(3)}(\vec{p}_1-\vec{p}_3)\delta^{(3)}(\vec{p}_2-\vec{p}_4)\ ,$$

$$\left\langle d_1d_2^\dagger c_3c_4^\dagger\right\rangle = \delta_{r_1r_2}\delta_{r_3r_4}\delta^{(3)}(\vec{p}_1-\vec{p}_2)\delta^{(3)}(\vec{p}_3-\vec{p}_4)$$

i uz primenu izraza za projektore na pozitivno odnosno negativno frekventna (zadatak 4.4) rešenja dobijamo

$$\begin{aligned}
&\left\langle\bar{\psi}_a(x_1)\psi_b(x_2)\psi_c(x_3)\bar{\psi}_d(x_4)\right\rangle \\
= &-\frac{1}{(2\pi)^6}\sum_{r_1r_2}\int\frac{d^3p_1d^3p_2}{4E_{p_1}E_{p_2}} \\
&(\not{p}_1-m)_{ca}(\not{p}_2+m)_{bd}e^{-ip_1(x_1-x_3)-ip_2(x_2-x_4)} \\
+ &\frac{1}{(2\pi)^6}\sum_{r_1r_3}\int\frac{d^3p_1d^3p_3}{4E_{p_1}E_{p_3}}(\not{p}_1-m)_{ba}(\not{p}_3+m)_{cd}e^{-ip_1(x_1-x_2)-ip_3(x_3-x_4)}\ .
\end{aligned}$$

Koristeći izraze (8.12-1) i (8.12-2) poslednji izraz prelazi u

$$\begin{aligned}
\left\langle\bar{\psi}_a(x_1)\psi_b(x_2)\psi_c(x_3)\bar{\psi}_d(x_4)\right\rangle &= -\left\langle\bar{\psi}_a(x_1)\psi_c(x_3)\right\rangle\left\langle\psi_b(x_2)\bar{\psi}_d(x_4)\right\rangle \\
&+ \left\langle\bar{\psi}_a(x_1)\psi_b(x_2)\right\rangle\left\langle\psi_c(x_3)\bar{\psi}_d(x_4)\right\rangle\ .
\end{aligned}$$

8.13 Zamenom (8.A-B) u komutator dobija se

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}[\bar{\psi},\gamma^\mu\psi] &= \frac{1}{2(2\pi)^3}\sum_{r,s}\int d^3pd^3q\frac{m}{\sqrt{E_pE_q}}\Big[\bar{u}(\vec{p},r)\gamma^\mu u(\vec{q},s)(c^\dagger(\vec{p},r)c(\vec{q},s) \\
&- c(\vec{q},s)c^\dagger(\vec{p},r))e^{i(p-q)x}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\ \bar{u}(\vec{p},r)\gamma^\mu v(\vec{q},s)(c^\dagger(\vec{p},r)d^\dagger(\vec{q},s)-d^\dagger(\vec{q},s)c^\dagger(\vec{p},r))e^{i(p+q)x}\\
&+\ \bar{v}(\vec{p},r)\gamma^\mu u(\vec{q},s)(d(\vec{p},r)c(\vec{q},s)-c(\vec{q},s)d(\vec{p},r))e^{-i(p+q)x}\\
&+\ \bar{v}(\vec{p},r)\gamma^\mu v(\vec{q},s)(d(\vec{p},r)d^\dagger(\vec{q},s)-d^\dagger(\vec{q},s)d(\vec{p},r))e^{i(q-p)x}\Big] \ .
\end{aligned}
\tag{8.13-1}
$$

Primenom antikomutacionih relacija poslednji izraz prelazi u

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}[\bar{\psi},\gamma^\mu\psi] &= :\bar{\psi}\gamma^\mu\psi: \\
&- \frac{1}{2(2\pi)^3}\int d^3p\frac{p^\mu}{E_p}\sum_r(\bar{u}(\vec{p},r)u(\vec{p},r)+\bar{v}(\vec{p},r)v(\vec{p},r)) \ ,
\end{aligned}
$$

gde smo iskoristili 4.21 i

$$
\bar{v}(\vec{p},r)\gamma^\mu v(\vec{p},r) = -\frac{p^\mu}{m}\bar{v}(\vec{p},r)v(\vec{p},r) \ .
$$

Traženi rezultat dobijamo primenom relacija ortogonalnosti (4.D).

8.14 Prvo ćemo pokazati da je

$$
\langle 0|\,T(\bar{\psi}_a(x)\psi_b(y))\,|0\rangle = -iS_{Fba}(y-x) \ .
$$

Po definiciji vremenskog uređenja uz (8.12-1) i (8.12-2) dobijamo

$$
\begin{aligned}
\langle 0|\,T(\bar{\psi}_a(x)\psi_b(y))\,|0\rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{2E_p}\\
&\Big[(\not{p}-m)_{ba}e^{ip(y-x)}\theta(x_0-y_0)\\
&-\ (\not{p}+m)_{ba}e^{ip(x-y)}\theta(y_0-x_0)\Big] \ .
\end{aligned}
\tag{8.14-1}
$$

Na osnovu zadatka 6.13 vidimo da je desna strana izraza (8.14-1) jednaka $-iS_{Fba}(y-x)$. Sada imamo

$$
\begin{aligned}
\langle 0|\,T(\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(y))\,|0\rangle &= \Gamma_{ab}\,\langle 0|\,T(\bar{\psi}_a(x)\psi_b(y))\,|0\rangle\\
&= -i\Gamma_{ab}S_{Fba}(y-x) = -i\mathrm{tr}\Big[\Gamma S_F(y-x)\Big]\\
&= -i\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip(y-x)}}{p^2-m^2+i\epsilon}\mathrm{tr}\Big[(\not{p}+m)\Gamma\Big]
\end{aligned}
$$

Identiteti iz zadataka 3.6(ii),(iv) daju nam

$$
\mathrm{tr}\Big[(\not{p}+m)\gamma_5\Big] = \mathrm{tr}\Big[(\not{p}+m)\gamma_5\gamma_\mu\Big] = 0,\ \mathrm{tr}\Big[(\not{p}+m)\gamma_\mu\gamma_\nu\Big] = 4mg_{\mu\nu} \ ,
$$

iz čega sledi traženi rezultat.

8.15 (i) U Weyl-ovo reprezentaciji je

$$\psi_c = \begin{pmatrix} \chi \\ -i\sigma_2\varphi^* \end{pmatrix} .$$

Uslov $\psi_M = \psi_M^c$ onda daje $\varphi = \chi$.

(ii) Neka je

$$\psi_M = \begin{pmatrix} \chi \\ -i\sigma_2\chi^* \end{pmatrix} , \phi_M = \begin{pmatrix} \varphi \\ -i\sigma_2\varphi^* \end{pmatrix} ,$$

onda imamo

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_M\phi_M &= -i\chi^\dagger\sigma_2\varphi^* + i\chi^T\sigma_2\varphi \\ &= -i\sigma_{2ab}\chi_a^*\varphi_b^* + i\sigma_{2ab}\chi_a\varphi_b \\ &= -i\sigma_{2ba}\varphi_b^*\chi_a^* + i\sigma_{2ba}\varphi_b\chi_a \\ &= -i\varphi^\dagger\sigma_2\chi^* + i\varphi^T\sigma_2\chi = \bar{\phi}_M\psi_M . \end{aligned}$$

U predhodnom izrazu koristili smo da su φ i χ antikomutirajuće (Grassmann-ove) varijable. Sledeći identiteti se dokazuje slično. Za naredni potrebno je da primenite identitet $\sigma_2\sigma^\mu\sigma_2 = \bar{\sigma}^{\mu T}$.

(iii) Odgovarajući operatori su:

$$b_M(\vec{p}, r) = \frac{c(\vec{p}, r) + d(\vec{p}, r)}{\sqrt{2}}, \ b_M^\dagger(\vec{p}, r) = \frac{c^\dagger(\vec{p}, r) + d^\dagger(\vec{p}, r)}{\sqrt{2}} .$$

Antikomutacione relacije su:

$$\{b_M(\vec{p}, r), b_M^\dagger(\vec{q}, s)\} = \delta_{rs}\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}),$$

$$\{b_M(\vec{p}, r), b_M(\vec{q}, s)\} = \{b_M^\dagger(\vec{p}, r), b_M^\dagger(\vec{q}, s)\} = 0 .$$

(iv) Dirac-ov spinor je $\psi_D = \psi_1 + i\psi_2$ gde su $\psi_{1,2}$ Majorana spinori. Lagranžijan je

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_1\partial\!\!\!/\psi_1 + i\bar{\psi}_2\partial\!\!\!/\psi_2 - m(\bar{\psi}_1\psi_1 + \bar{\psi}_2\psi_2) + ei(\bar{\psi}_1 A\!\!\!/\psi_2 - \bar{\psi}_2 A\!\!\!/\psi_1) .$$

8.16 Pri delovanju Lorentz-ovih transformacija operator $V_\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)$ se transformiše:

$$\begin{aligned} V_\mu &\rightarrow U(\Lambda)V_\mu(x)U^{-1}(\Lambda) \\ &= U(\Lambda)\bar{\psi}(x)U^{-1}(\Lambda)\gamma_\mu U(\Lambda)\psi(x)U^{-1}(\Lambda) \\ &= \bar{\psi}(\Lambda x)S(\Lambda)\gamma_\mu S^{-1}(\Lambda)\psi(\Lambda x) = \Lambda^\nu{}_\mu V_\nu(\Lambda x) , \end{aligned} \tag{8.16-1}$$

jer je $S\gamma_\nu S^{-1} = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma_\mu$. Operator $A_\mu(x) = \bar\psi(x)\gamma_5\partial_\mu\psi(x)$ prelazi u

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &\to U(\Lambda)A_\mu(x)U^{-1}(\Lambda) \\ &= U(\Lambda)\bar\psi(x)U^{-1}(\Lambda)\gamma_5\partial_\mu U(\Lambda)\psi(x)U^{-1}(\Lambda) \\ &= \bar\psi(\Lambda x)\gamma_5\partial_\mu\psi(\Lambda x) \ , \end{aligned}$$

gde smo iskoristili već poznatu relaciju $S\gamma_5 S^{-1} = \gamma_5$. Kako je dalje $\partial_\mu = \Lambda^\rho{}_\mu \partial'_\rho$ to imamo

$$A_\mu(x) \to \Lambda^\rho{}_\mu A_\rho(\Lambda x) \ . \tag{8.16-2}$$

Pri prostornoj refleksiji imamo

$$\begin{aligned} V_\mu(x) &\to PV_\mu(x)P^{-1} = \psi^\dagger(t,-\vec{x})\gamma_\mu\gamma_0\psi(t,-\vec{x}) \\ &= \begin{cases} V_0(t,-\vec{x}), & \text{za } \mu = 0 \\ -V_i(t,-\vec{x}), & \text{za } \mu = i \end{cases} \\ &= V^\mu(t,-\vec{x}) \ , \end{aligned}$$

jer je $P\bar\psi(x)P^{-1} = (P\psi(x)P^{-1})^\dagger\gamma_0 = (\gamma_0\psi(t,-\vec{x}))^\dagger\gamma_0 = \psi^\dagger(t,-\vec{x})$. Slično se dobija i

$$\begin{aligned} PA_\mu(x)P^{-1} &= -\bar\psi(t,-\vec{x})\gamma_5\partial_\mu\psi(t,-\vec{x}) \\ &= \begin{cases} -\bar\psi(t,-\vec{x})\gamma_5\partial'_0\psi(t,-\vec{x}), & \text{za } \mu = 0 \\ \bar\psi(t,-\vec{x})\gamma_5\partial'_i\psi(t,-\vec{x}), & \text{za } \mu = i \end{cases} \\ &= -A^\mu(t,-\vec{x}) \ . \end{aligned}$$

Iz $\tau\psi(t,\vec{x})\tau^{-1} = T\psi(-t,\vec{x})$ gde je τ antiunitarni operator vremenske inverzije sledi $\tau\bar\psi(t,\vec{x})\tau^{-1} = \tau\psi^\dagger(t,\vec{x})\tau^{-1}\gamma_0^* = \psi^\dagger(-t,\vec{x})T^\dagger\gamma_0^*$. Na osnovu toga je

$$\tau V_\mu \tau^{-1} = \psi^\dagger(-t,\vec{x})T^\dagger(\gamma_0\gamma_\mu)^* T\psi(-t,\vec{x}) \ . \tag{8.16-3}$$

Ako dalje iskoristimo $T\gamma_\mu T^{-1} = \gamma^{\mu *}$ dobijamo

$$\tau V_\mu(x)\tau^{-1} = \bar\psi(-t,\vec{x})\gamma^\mu\psi(-t,\vec{x}) = V^\mu(-t,\vec{x}) \ . \tag{8.16-4}$$

Preporučujemo vam da do istog rezultata dođete u konkretnoj reprezentaciji gde je T matrica data sa $T = i\gamma^1\gamma^3$. Potrebno je da pokažete

$$i\gamma^1\gamma^3\gamma_0^*\gamma_\mu^* i\gamma^1\gamma^3 = \gamma^\mu \tag{8.16-5}$$

Operator $A_\mu(x)$ pri vremenskoj inverziji prelazi u

$$-\bar\psi(-t,\vec{x})\gamma_5\partial'^\mu\psi(-t,\vec{x}) = -A^\mu(-t,\vec{x}) \ . \tag{8.16-6}$$

Iz izraza $\mathcal{C}\psi_a(x)\mathcal{C}^{-1} = (C\gamma_0)_{ab}\psi_b^\dagger(x)$ sledi $\mathcal{C}\bar{\psi}_a\mathcal{C}^{-1} = -\psi_b C^{-1}_{ba}$, gde je $\mathcal{C}$ unitarni operator konjugacije naboja dok je C matrica. Lako se pokazuje da je

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}V^\mu\mathcal{C}^{-1} &= -\psi_c C^{-1}_{ca}\gamma^\mu_{ab}C_{bd}\bar{\psi}_d \\
&= \psi_c(\gamma^\mu)^T_{cd}\bar{\psi}_d \\
&= \psi_c(\gamma^\mu)_{dc}\bar{\psi}_d \\
&= -\bar{\psi}_d\gamma^\mu_{dc}\psi_c \\
&= -V^\mu
\end{aligned}$$

Minus u pretposlednjem redu pojavio se pri antikomutiranju polja ψ i $\bar{\psi}$ uz ignorisanje beskonačne konstante. Slično se dobija i $\mathcal{C}A_\mu\mathcal{C}^{-1} = (\partial_\mu\bar{\psi}\gamma_5\psi)^T$

8.17 Lorentz-ova transformacija Λ deluje transformacijom sličnosti

$$U(\Lambda)\ldots U^{-1}(\Lambda)$$

na Dirac-ov lagranžijan :

$$\begin{aligned}
&U(\Lambda)\mathcal{L}(x)U^{-1}(\Lambda) \\
&= iU(\Lambda)\bar{\psi}(x)U^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu\partial_\mu U(\Lambda)\psi(x)U^{-1}(\Lambda) - mU(\Lambda)\bar{\psi}(x)\psi(x)U^{-1}(\Lambda) \\
&= i\bar{\psi}(\Lambda x)S\gamma^\mu\partial_\mu S^{-1}\psi(\Lambda x) - m\bar{\psi}(\Lambda x)SS^{-1}\psi(\Lambda x) \\
&= i(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu\bar{\psi}(\Lambda x)\gamma^\nu\Lambda^\rho{}_\mu\partial'_\rho\psi(\Lambda x) - \bar{\psi}(\Lambda x)\psi(\Lambda x) \\
&= i\bar{\psi}(\Lambda x)\gamma^\mu\partial'_\mu\psi(\Lambda x) - m\bar{\psi}(\Lambda x)\psi(\Lambda x) \\
&= \mathcal{L}(\Lambda x)\ .
\end{aligned}$$

Prostorna refleksija lagranžijan, $\mathcal{L}$ prevodi u

$$\begin{aligned}
P\mathcal{L}P^{-1} &= i\psi^\dagger(t,-\vec{x})\gamma^\mu\partial_\mu\gamma^0\psi(t,-\vec{x}) \\
&- m\bar{\psi}(t,-\vec{x})\psi(t,-\vec{x})\ .
\end{aligned}$$

Kako je

$$\gamma^\mu\gamma^0\partial_\mu = \gamma^0\gamma^0\partial'_0 + \gamma^0\gamma^i\partial'_i = \gamma^0\gamma^\mu\partial'_\mu\ ,$$

to dobijamo

$$P\mathcal{L}(t,\vec{x})P^{-1} = \mathcal{L}(t,-\vec{x})\ .$$

Za razliku od prethodnog zadatka gde smo koristili osobine matrica T i C ovde ćemo koristiti eksplicitne izraze za njih. Polazeći od

$$\tau\psi(t,\vec{x})\tau^{-1} = i\gamma^1\gamma^3\psi(-t,\vec{x}) \tag{8.17-1}$$

dobijamo

$$\begin{aligned} \tau\bar{\psi}(t,\vec{x})\tau^{-1} &= \tau\psi^{\dagger}(t,\vec{x})\tau^{-1}\gamma_0^* \\ &= -i\psi^{\dagger}(-t,\vec{x})(\gamma^3)^{\dagger}(\gamma^1)^{\dagger}(\gamma^0)^* \\ &= -i\bar{\psi}(-t,\vec{x})\gamma^3\gamma^1 \ . \end{aligned}$$

Dalje je

$$\begin{aligned} \tau\mathcal{L}\tau^{-1} &= -i\bar{\psi}(-t,\vec{x})\gamma^3\gamma^1(\gamma^\mu)^*\gamma^1\gamma^3\partial_\mu\psi(-t,\vec{x}) \\ &- m\bar{\psi}(-t,\vec{x})\gamma^3\gamma^1\gamma^1\gamma^3\psi(-t,\vec{x}) \end{aligned}$$

Primenom

$$(\gamma^0)^* = \gamma^0,\ (\gamma^1)^* = \gamma^1,\ (\gamma^2)^* = -\gamma^2,\ (\gamma^3)^* = \gamma^3 \ ,$$

antikomutacionih relacija između γ matrica i prelazeći na diferenciranje po primovanim koordinatama dobija se

$$\begin{aligned} \tau\mathcal{L}\tau^{-1} &= i\bar{\psi}(-t,\vec{x})\gamma^\mu\partial'_\mu\psi(-t,\vec{x}) - m\bar{\psi}(-t,\vec{x})\psi(-t,\vec{x}) \\ &= \mathcal{L}(-t,\vec{x}) \ . \end{aligned}$$

Konjugacija naboja operator ψ prevodi u

$$\mathcal{C}\psi_a\mathcal{C}^{-1} = i(\gamma^2)_{ab}\psi_b^{\dagger} \ ,$$

odakle se dobija

$$\mathcal{C}\bar{\psi}_a\mathcal{C}^{-1} = i\psi_b(\gamma^2\gamma^0)_{ba} \ .$$

Lagranžijan onda prelazi u

$$\mathcal{C}\mathcal{L}\mathcal{C}^{-1} = -i\psi_c(\gamma^2\gamma^0\gamma^\mu\gamma^2)_{ca}\partial_\mu\psi_a^{\dagger} + m\psi_b(\gamma^2\gamma^0\gamma^2)_{ba}\psi_a^{\dagger} \ .$$

Kako je

$$\gamma^2\gamma^0\gamma^\mu\gamma^2\partial_\mu = (-\gamma^0\partial_0 + \gamma^1\partial_1 - \gamma^2\partial_2 + \gamma^3\partial_3)\gamma_0 \ ,$$

to kintečki term postaje

$$-i\psi_c\Big[-\gamma^0\partial_0 + \gamma^1\partial_1 - \gamma^2\partial_2 + \gamma^3\partial_3)\Big]_{cd}\bar{\psi}_d \ .$$

U Dirac-ovoj reprezentaciji je

$$(\gamma^0)^T = \gamma^0,\ (\gamma^1)^T = -\gamma^1,\ (\gamma^2)^T = \gamma^2,\ (\gamma^3)^T = -\gamma^3$$

pa kinetički term postaje

$$i\psi_c\gamma^{\mu T}_{cd}\partial_\mu\bar{\psi}_d = -\partial_\mu\bar{\psi}_d\gamma^\mu_{dc}\psi_c \ .$$

Ekstra minus u poslednjem izrazu je posledica antikomutiranja ψ i $\bar{\psi}$ uz ignorisanje beskonačne konstante $\delta^{(3)}(0)$. Tako dolazimo do

$$\mathcal{C}\mathcal{L}\mathcal{C}^{-1} = -i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \ ,$$

što je polazni lagranžijan do na četvorodivergenciju.

Kanonsko kvantovanje elektromagnetnog polja

9.1 Traženi komutator je

$$[A^\mu(t,\vec{x}),\dot{A}^\nu(t,\vec{y})] = \sum_{\lambda,\lambda'}\frac{i}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3kd^3q}{2\sqrt{\omega_k\omega_q}}\omega_q\epsilon^\mu_\lambda(\vec{k})\epsilon^\nu_{\lambda'}(\vec{q})$$
$$\Big([a_\lambda(\vec{k}),a^\dagger_{\lambda'}(\vec{q})]e^{i(\vec{k}\vec{x}-\vec{q}\vec{y})} - [a^\dagger_\lambda(\vec{k}),a_{\lambda'}(\vec{q})]e^{-i(\vec{k}\vec{x}-\vec{q}\vec{y})}\Big)\ ,$$

gde smo nulte članove odbacili. Primenom komutacionih relacija, (9.G) kao i relacija ortogonalnosti za polarizacione vektore, (9.D) dobijamo

$$\begin{aligned}[A^\mu(t,\vec{x}),\dot{A}^\nu(t,\vec{y})] &= -\frac{i}{2(2\pi)^3}g^{\mu\nu}\int d^3k\Big(e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})}+e^{i\vec{k}(\vec{y}-\vec{x})}\Big)\\ &= -ig^{\mu\nu}\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\ .\end{aligned}$$

9.2 Prvo ćemo izračunati traženi komutator u Lorentz-ovoj kalibraciji. Primenom komutacionih relacija i relacija ortogonalnosti, (9.D) dobija se

$$iD^{\mu\nu} = [A^\mu(x),A^\nu(y)] = -g^{\mu\nu}\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{2|\vec{k}|}\Big(e^{-ik(x-y)}-e^{ik(x-y)}\Big)\ . \tag{9.2-1}$$

Integral (9.2-1) lako se rešava prelaskom na sferne koordinate (koristićemo oznake $x_0-y_0=t, |\vec{x}-\vec{y}|=r$)

$$\begin{aligned}iD^{\mu\nu}(x-y) &= -g^{\mu\nu}\frac{1}{2(2\pi)^2}\int_0^\infty kdk\int_0^\pi d\theta\\ &\quad \sin\theta\Big(e^{-i(kt-kr\cos\theta)}-e^{i(kt-kr\cos\theta)}\Big)\ .\end{aligned}$$

Integracijom dobijamo

$$\begin{aligned} iD^{\mu\nu}(x-y) &= -g^{\mu\nu}\frac{1}{4\pi ir}(\delta(t-r)-\delta(t+r)) \\ &= -ig^{\mu\nu}D(x-y) \ , \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} iD^{\mu\nu}(x-y) &= g^{\mu\nu}\frac{i}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|}\Big(\delta(x_0-y_0-|\vec{x}-\vec{y}|)-\delta(x_0-y_0+|\vec{x}-\vec{y}|)\Big) \\ &= \frac{i}{2\pi}g^{\mu\nu}\epsilon(x_0-y_0)\delta^{(4)}((x-y)^2) \ , \end{aligned}$$

gde je

$$\epsilon(x_0-y_0)=\begin{cases} 1, & x_0>y_0 \\ -1, & y_0>x_0 \end{cases} .$$

U Coulomb-ovoj kalibraciji je $A^0=0$ pa je jedini netrivijalni komutator

$$[A^i(x),A^j(y)]=\frac{1}{2(2\pi)^3}\sum_{\lambda,\lambda'=1}^{2}\int\frac{d^3kd^3q}{\sqrt{\omega_k\omega_q}}\epsilon^i_\lambda(\vec{k})\epsilon^j_{\lambda'}(\vec{q})$$
$$\Big([a_\lambda(\vec{k}),a^\dagger_{\lambda'}(\vec{q})]e^{-i(kx-qy)}+[a^\dagger_\lambda(\vec{k}),a_{\lambda'}(\vec{q})]e^{i(kx-qy)}\Big) \ .$$

Primenom (9.E) dobija se

$$[A^i(x),A^j(y)]=i\delta^{ij}D(x-y)+I \ , \tag{9.2-2}$$

gde je

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{\omega_k^3}k^ik^j\Big(e^{-ik(x-y)}-e^{ik(x-y)}\Big) \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^3}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\int\frac{d^3k}{|\vec{k}|^3}\Big(e^{-ik(x-y)}-e^{ik(x-y)}\Big) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}H(x-y) \ . \end{aligned} \tag{9.2-3}$$

Integracijom po uglovima θ i ϕ za funkciju $H(x-y)$ dobija se

$$\begin{aligned} H(x-y) &= -\frac{i}{2r(2\pi)^2}\int_0^\infty\frac{dk}{k^2}\Big(e^{ik(t-r)} \\ &-e^{-ik(t+r)}-e^{ik(t+r)}+e^{-ik(t-r)}\Big) \ . \end{aligned} \tag{9.2-4}$$

U poslednjem integralu k^2 u imeniocu podintegralne funkcije zamenićemo sa $k^2+\epsilon^2$. Ova smena je regularna jer podintegralna funkcija nema pol u $k=0$. Ako se još u prva dva integrala uvede smena $k \to -k$ dobijamo

$$H(x-y) = -\frac{i}{2(2\pi)^2 r}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{k^2+\epsilon^2}\Big(e^{-ik(t-r)} - e^{ik(t+r)}\Big) \ . \tag{9.2-5}$$

Dobijeni integral ćemo izračunati primenom Cauchy-jeve teoreme. Ako je $r > |t|$, onda (da integral ne bi divergirao za veliko $|k|$) konturu integracije zatvaramo u gornjoj poluravni pa je

$$H = \frac{1}{8i\pi^2 r}2\pi i \mathrm{Res}_{i\epsilon} = \frac{1}{8i\pi\epsilon r}e^{-\epsilon r}(e^{\epsilon t} - e^{-\epsilon t}) \ .$$

U limesu $\epsilon \to 0$ dobijamo

$$H = \frac{t}{4\pi i r} \ .$$

U slučaju $r < |t|$ pogodnije je da integral (9.2-5) prepišemo u obliku

$$H(x-y) = \frac{1}{2i(2\pi)^2 r}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{k^2+\epsilon^2}e^{-ikt}\Big(e^{ikr} - e^{-ikr}\Big) \ . \tag{9.2-6}$$

Konturu integracije zatvaramo u donjoj poluravni za $t > 0$, odnosno u gornjoj poluravni za $t < 0$, pa je

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{8i\pi^2 r}2\pi i \begin{cases} -\mathrm{Res}_{-i\epsilon}, & t>0 \\ \mathrm{Res}_{i\epsilon}, & t<0 \end{cases} \\ &= \frac{\mathrm{sgn}t}{4i\pi} \ . \end{aligned} \tag{9.2-7}$$

Zamenom izraza za funkciju H u (9.2-2) dobija se traženi komutator.

9.3 Komutatori između komponenti jačina polja su kalibraciono invarijantni. Najlakše ih je izračunati u Lorentz-ovoj kalibraciji potencijala. Komutator između komponenti električnog polja je

$$[E^i(x), E^j(y)] = \partial_x^i \partial_y^j [A^0(x), A^0(y)] + \partial_x^0 \partial_y^0 [A^i(x), A^j(y)] \ , \tag{9.3-1}$$

gde smo izostavili nulte članove. Na osnovu zadatka 9.2 dobija se

$$[E^i(x), E^j(y)] = i(\partial_x^i \partial_x^j - \delta_{ij}\partial_x^0 \partial_x^0)D(x-y) \ .$$

Komutator između komponenti magnetnog polja je:

$$\begin{aligned} [B^i(x), B^j(y)] &= \epsilon^{ikl}\epsilon^{jmn}\partial_k^x \partial_m^y [A^l(x), A^n(y)] \\ &= i\epsilon^{ikl}\epsilon^{jml}\partial_k^x \partial_m^y D(x-y) \\ &= i(\delta^{ij}\delta^{km} - \delta^{im}\delta^{kj})\partial_k^x \partial_m^y D(x-y) \\ &= i(-\delta^{ij}\nabla^2 + \partial_i^x \partial_j^x)D(x-y) \ . \end{aligned}$$

Slično se dobija i

$$[E^i(x), B^j(y)] = i\epsilon^{jki}\partial_0^x\partial_k^x D(x-y) \ .$$

Pokažite da su prethodni komutatori jednaki nuli za $x_0 = y_0$. Takođe proverite da se prethodni izrazi dobijaju u Coulomb-ovoj kalibraciji.

9.4 Prvo ćemo naći komutator hamiltonijana sa potencijalom A^ν:

$$\begin{aligned}
[H, A^\nu(x)] &= -\frac{1}{2}\int d^3y[\pi^\mu\pi_\mu + \nabla A^\mu \nabla A_\mu, A^\nu(x)] \\
&= -\frac{1}{2}\int d^3y\Big(\pi^\mu(y)[\pi_\mu(y), A^\nu(x)] + [\pi^\mu(y), A^\nu(x)]\pi_\mu(y)\Big) \\
&= -\frac{1}{2}\int d^3y\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\Big(\pi^\mu(y)(-i)g_\mu^\nu - ig^{\mu\nu}\pi_\mu(y)\Big) \\
&= i\pi^\nu(x) = -i\partial^0 A^\nu \ .
\end{aligned}$$

Slično se pokazuje i komutator operatora A^ν sa operatorom tro-impulsa elektromagnetnog polja,

$$[\vec{P}, A^\nu(x)] = i\nabla A^\nu \ .$$

9.5 Helicitet ćemo odrediti na osnovu ponašanja vektora polarizacije, $\epsilon^\mu_{(\pm)}(\vec{k})$ pri rotacijama za ugao θ oko ose $\vec{k}/|\vec{k}| = \vec{e}_z$. Naime,

$$\begin{aligned}
\epsilon'_\pm &= \Lambda(\theta)\epsilon_\pm = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ \pm i/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= e^{\pm i\theta}\begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ \pm i/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = e^{\pm i\theta}\epsilon_\pm \ ,
\end{aligned}$$

odakle se vidi da je helicitet $\lambda = \pm 1$.

9.6 (i) Pokažite prvo da je

$$[a_3(\vec{k}) - a_0(\vec{k}), a_3^\dagger(\vec{q}) - a_0^\dagger(\vec{q})] = 0 \ ,$$

primenom komutacionih relacija. Na osnovu toga je $\left\langle\Phi_n\middle|\Phi_n\right\rangle = \delta_{n0}$.

(ii) Postoje samo dva nenulta člana u izrazu $\langle\Phi| A^\mu |\Phi\rangle$:

$$\langle\Phi| A^\mu |\Phi\rangle = C_0^* C_1 \langle\Phi_0| A^\mu |\Phi_1\rangle + C_0 C_1^* \langle\Phi_1| A^\mu |\Phi_0\rangle \ .$$

Pokažite da je

$$\langle\Phi_0|\, A^\mu\, |\Phi_1\rangle = -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int \frac{d^3k}{\sqrt{2|\vec{k}|}} f(\vec{k})e^{-ikx}\Big(\epsilon^\mu_{(0)}(\vec{k}) + \epsilon^\mu_{(3)}(\vec{k})\Big)\ .$$

Kako je

$$\epsilon^\mu_{(0)}(\vec{k}) + \epsilon^\mu_{(3)}(\vec{k}) = \frac{k^\mu}{|\vec{k}|}\ ,$$

to dobijamo

$$\langle\Phi|\, A^\mu\, |\Phi\rangle = \partial^\mu\Lambda\ ,$$

gde je

$$\Lambda = -\frac{i}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int \frac{d^3k}{\sqrt{2|\vec{k}|}|\vec{k}|}\Big(C_0^*C_1 f(\vec{k})e^{-ikx} - C_0C_1^* f^*(\vec{k})e^{ikx}\Big)\ .$$

9.7 Zadate veličine su projektori na bezmasena stanja heliciteta ± 1 odnosno 0. Rezultati su $P^{\mu\nu}P_{\nu\sigma} = P^\mu_\sigma$, $P^{\mu\nu}_\perp P_{\nu\sigma\perp} = P^\mu_{\sigma\perp}$, $P^{\mu\nu} + P^{\mu\nu}_\perp = g^{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}P_{\mu\nu} = 2$, $g^{\mu\nu}P^\perp_{\mu\nu} = 2$, $P^{\mu\nu}P^{\nu\sigma}_\perp = 0$.

9.8 (i) Komponente M^{ij} smo primenom Noether-ine teoreme našli u zadatku 5.16. Na osnovu toga (u Coulomb-ovoj kalibraciji) dobijamo

$$J^l = \epsilon^{lij}\int d^3x\Big(\dot{A}^j A^i + x^i\dot{A}^k\partial^j A^k\Big)\ .$$

(ii) Spinski deo uglovnog momenta je

$$S^l = \epsilon^{lij}\int d^3x \dot{A}^j A^i\ .$$

Zamenom izraza za potencijal dobijamo

$$\begin{aligned} S^l \;=\; & \frac{i}{2}\epsilon^{lij}\sum_{\lambda,\lambda'}\int d^3k\Big(-\epsilon^j_\lambda(\vec{k})\epsilon^i_{\lambda'}(-\vec{k})a_\lambda(\vec{k})a_{\lambda'}(-\vec{k})e^{-2i\omega_k t} \\ - \; & \epsilon^j_\lambda(\vec{k})\epsilon^i_{\lambda'}(\vec{k}) : a_\lambda(\vec{k})a^\dagger_{\lambda'}(\vec{k}) : + \epsilon^j_\lambda(\vec{k})\epsilon^i_{\lambda'}(\vec{k})a^\dagger_\lambda(\vec{k})a_{\lambda'}(\vec{k}) \\ + \; & \epsilon^j_\lambda(\vec{k})\epsilon^i_{\lambda'}(-\vec{k})a^\dagger_\lambda(\vec{k})a^\dagger_{\lambda'}(-\vec{k})e^{2i\omega_k t}\Big)\ . \end{aligned}$$

Prvi i poslednji sabirak su simetrični pri zameni indeksa i i j (što se lako pokazuje nakon smene $\lambda \to \lambda'$, $\vec{k} \to -\vec{k}$), pa posle množenja sa antisimetričnim ϵ simbolom daju nulu. Tako dobijamo:

$$\vec{S} = \frac{i}{2}\sum_{\lambda,\lambda'}\int d^3k\Big(\vec{\epsilon}_{\lambda'}(\vec{k})\times\vec{\epsilon}_\lambda(\vec{k})\Big)\Big(a^\dagger_\lambda(\vec{k})a_{\lambda'}(\vec{k}) - a^\dagger_{\lambda'}(\vec{k})a_\lambda(\vec{k})\Big)\ .$$

Kako je $\vec{\epsilon}_1(\vec{k}) \times \vec{\epsilon}_2(\vec{k}) = \vec{k}/|\vec{k}|$ to imamo

$$\vec{S} = i \int d^3k \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \Big(a_2^\dagger(\vec{k}) a_1(\vec{k}) - a_1^\dagger(\vec{k}) a_2(\vec{k}) \Big) \ .$$

Prelaskom na operatore $a_\pm(\vec{k})$ definisane u zadatku, spin $\vec{S}$ prelazi u dijagonalan oblik

$$\vec{S} = \int d^3k \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \Big(a_+^\dagger(\vec{k}) a_+(\vec{k}) - a_-^\dagger(\vec{k}) a_-(\vec{k}) \Big) \ .$$

Iz prethodnog izraza je jasno da je

$$\Lambda = \int d^3k \Big(a_+^\dagger(\vec{k}) a_+(\vec{k}) - a_-^\dagger(\vec{k}) a_-(\vec{k}) \Big) \ ,$$

operator heliciteta.

(iii) Primenom komutacionih relacija (9.J) dobijamo

$$[a_\pm^\dagger(\vec{k}), a_\pm(\vec{q})] = -\delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{q})$$

odakle je

$$\begin{aligned} \Lambda a_\pm^\dagger(\vec{q}) |0\rangle &= [\Lambda, a_\pm^\dagger(\vec{q})] |0\rangle \\ &= \pm \int d^3k \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{q}) a_\pm^\dagger(\vec{k}) |0\rangle \\ &= \pm a_\pm^\dagger(\vec{q}) |0\rangle \ . \end{aligned}$$

(iv) Komutator između angularnog momenta i potencijala je:

$$\begin{aligned} [J^l, A^m(t,\vec{x})] &= \epsilon^{lij} \int d^3y \left[\dot{A}^j(t,\vec{y}), A^m(t,\vec{x}) \right] A^i(t,\vec{y}) \\ &+ y^i [\dot{A}^n(t,\vec{y}), A^m(t,\vec{x})] \partial^j A^n(t,\vec{y}) \\ &= -i\epsilon^{lij} \int d^3y \delta^{(3)}_{\perp nm}(\vec{x} - \vec{y}) \Big(\delta_{nj} A^i(t,\vec{y}) + y^i \partial^j A^n(t,\vec{y}) \Big) \\ &= -i\epsilon^{lij} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3y \int d^3k e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} \Big(\delta_{nm} - \frac{k^n k^m}{\vec{k}^2} \Big) \\ &\quad \Big(\delta_{jn} A^i(t,\vec{y}) + y^i \partial^j A^n(t,\vec{y}) \Big) \ . \end{aligned} \tag{9.8-1}$$

Član koji sadrži $k^n k^m / k^2$ jednak je nuli što se lako pokazuje:

$$\begin{aligned} &\int d^3y \int d^3k \frac{k^n k^m}{\vec{k}^2} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} \Big(A^i \delta_{nj} + y^i \partial^j A^n \Big) \\ &= \int d^3y \int d^3k \Big(A^i \delta_{nj} + y^i \partial^j A^n \Big) \frac{k^m}{\vec{k}^2} (i \frac{\partial}{\partial y^n} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})}) \ . \end{aligned} \tag{9.8-2}$$

Primenom parcijalne integracije u (9.8-2) dobijamo da je predhodni izraz jednak nuli (uz Coulomb-ov kalibracioni uslov). Iz (9.8-1) onda dobijamo

$$[J^l, A^m(t,\vec{x})] = i\epsilon^{lmi}A^i + i(\vec{r}\times\nabla)^l A^m \ .$$

9.9 Jačina električnog polja je

$$\vec{E} = \int \frac{d^3k}{\sqrt{2(2\pi)^3\omega_k}} \sum_{\lambda=1}^{2} i\omega_k \vec{\epsilon}_\lambda(\vec{k})\Big(a_\lambda(\vec{k})e^{-ikx} - a_\lambda^\dagger(\vec{k})e^{ikx}\Big) \ ,$$

dok je jačina magnetnog polja

$$\vec{B} = \int \frac{d^3k}{\sqrt{2(2\pi)^3\omega_k}} \sum_{\lambda=1}^{2} i(\vec{k}\times\vec{\epsilon}_\lambda(\vec{k}))\Big(a_\lambda(\vec{k})e^{-ikx} - a_\lambda^\dagger(\vec{k})e^{ikx}\Big) \ .$$

Lako se dobija da je

$$\langle 0|\{E^m(x), B^n(y)\}|0\rangle = \int \frac{d^3k}{2(2\pi)^3} \sum_{\lambda=1}^{2} \epsilon_\lambda^m(\vec{k})(\vec{k}\times\vec{\epsilon}_\lambda(\vec{k}))^n \Big(e^{-ik(x-y)} + e^{ik(x-y)}\Big) \ . \tag{9.9-1}$$

Kako je

$$\sum_{\lambda=1}^{2} \epsilon^{nij} k^i \epsilon_\lambda^j(\vec{k})\epsilon_\lambda^m(\vec{k}) = \epsilon^{njm}k^j \ ,$$

to (9.9-1) postaje

$$\langle 0|\{E^m(x), B^n(y)\}|0\rangle = \int \frac{d^3k}{2(2\pi)^3} \epsilon^{nim}k^j \Big(e^{-ik(x-y)} + e^{ik(x-y)}\Big) \ ,$$

što se uz oznake $\tau = x_0 - y_0$ i $\vec{r} = \vec{x} - \vec{y}$ se može prepisati u obliku

$$\begin{aligned}
\langle 0|\{E^m(x), B^n(y)\}|0\rangle &= \epsilon^{njm} \frac{\partial^2}{\partial\tau\partial r^j} \int \frac{d^3k}{2(2\pi)^3\omega_k} \Big(e^{-ik(x-y)} + e^{ik(x-y)}\Big) \\
&= -\frac{1}{2\pi^2} \epsilon^{njm} \frac{\partial^2}{\partial\tau\partial r^j} \frac{1}{(x-y)^2} \ .
\end{aligned} \tag{9.9-2}$$

Odgovarajući integral iz prethodnog izraza izračunali smo u zadatku (7.15).

Rešenja 10

Procesi u najnižem redu teorije perturbacije

10.1 Kvadrat modula amplitude prelaza je

$$|S_{fi}|^2 = (2\pi)^8[\delta^{(4)}(p_1' + p_2' - p_1 - p_2)]^2 \frac{m_A m_B m_C m_D}{V^4 E_1 E_2 E_1' E_2'} |\mathcal{M}|^2 \ . \qquad (10.1\text{-}1)$$

Kvadrat četvorodimenzione delta funkcije je

$$\begin{aligned}
[\delta^{(4)}(p_f - p_i)]^2 &= \delta^{(4)}(p_f - p_i)\delta^{(4)}(0) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4}\delta^{(4)}(p_f - p_i)\int_V d^3x \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \\
&= \frac{TV}{(2\pi)^4}\delta^{(4)}(p_f - p_i) \ , \qquad (10.1\text{-}2)
\end{aligned}$$

gde su: $p_i = p_1 + p_2$ inicijalni, $p_f = p_1' + p_2'$ finalni četvoroimpuls. Diferencijalni presek (10.D) je

$$d\sigma = \frac{|S_{fi}|^2}{T}\frac{1}{|\vec{J}_{\rm in}|}\frac{V^2 d^3p_1' d^3p_2'}{(2\pi)^6} \ . \qquad (10.1\text{-}3)$$

Fluks gustine struje u sistemu centra mase je

$$|\vec{J}_{\rm in}| = \bar{\psi}\vec{\gamma}\psi = \frac{|\vec{p}_1|(E_1 + E_2)}{V E_1 E_2} \ , \qquad (10.1\text{-}4)$$

što se lako proverava. Zamenom (10.1-1), (10.1-2) i (10.1-4) u (10.1-3) dobija se

$$\begin{aligned}
d\sigma &= \frac{1}{(2\pi)^2}\delta(E_1' + E_2' - E_1 - E_2)\delta^{(3)}(\vec{p}_1' + \vec{p}_2' - \vec{p}_1 - \vec{p}_2')|\mathcal{M}|^2 \\
&\quad \frac{m_A m_B m_C m_D}{(E_1 + E_2)E_1' E_2' |\vec{p}_1|} d^3p_1' d^3p_2' \ . \qquad (10.1\text{-}5)
\end{aligned}$$

Integracijom po $\vec{p}_2'$ dolazimo do

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int \delta(\sqrt{p_1'^2+m_C^2}+\sqrt{p_1'^2+m_D^2}-E_1-E_2)|\mathcal{M}|^2\\ &\quad \frac{m_A m_B m_C m_D}{(E_1+E_2)E_1'E_2'}\frac{p_1'^2 dp_1'}{p_1}\ ,\end{aligned}$$

gde smo iskoristili činjenicu da radimo u sistemu centa mase. Primenom formule

$$g(x)\delta(f(x)) = \frac{g(x)}{|f'(x)|}\delta(f(x)) \qquad (10.1\text{-}6)$$

dobija se traženi rezultat.

10.2 Četvorodimenzionalna delta funkcija i mera integracije su invarijantne veličine (zadatak 6.3) pa je i dati integral Lorentz invarijantan. U inercijalnom sistemu u kome je $\vec{P}=0$ integral postaje

$$\frac{1}{4}\int \frac{d^3p}{\sqrt{p^2+m^2}}\frac{d^3q}{\sqrt{q^2+m'^2}}\delta^{(3)}(\vec{p}+\vec{q})\delta(E_p+E_q-P^0)\ . \qquad (10.2\text{-}1)$$

Integracijom po $\vec{q}$ u (10.2-1) i prelaskom na sferne koordinate dobijamo

$$\pi\int_0^\infty p^2dp\frac{1}{\sqrt{p^2+m^2}\sqrt{p^2+m'^2}}\delta(\sqrt{p^2+m^2}+\sqrt{p^2+m'^2}-P^0)\ .$$

Primenom formule (10.1-6) dobija se

$$\frac{\pi}{P_0}\sqrt{\frac{(m^2-m'^2-P_0^2)^2}{4P_0^2}-m'^2}\ .$$

10.3 Feynman-ova amplituda, $\mathcal{M}$, je broj pa je

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^* &= \mathcal{M}^\dagger = \Big(\bar{u}(\vec{p},r)\gamma_\mu(1-\gamma_5)u(\vec{q},s)\Big)^\dagger\epsilon^{\mu*}\\ &= u^\dagger(\vec{q},s)(1-\gamma_5)\gamma^0\gamma_\mu\gamma^0\gamma^0u^\dagger(\vec{p},r)\epsilon^{\mu*}\\ &= \bar{u}(\vec{q},s)(1+\gamma_5)\gamma_\mu u(\vec{p},r)\epsilon^{\mu*}\ ,\end{aligned}$$

gde smo primenili identitete iz zadataka 3.1 i 3.3. Srednja vrednost kvadrata modula amplitude je

$$\frac{1}{4}\sum_{r,s=1}^{2}|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4}\sum_{r,s=1}^{2}\bar{u}_a(\vec{p},r)[\gamma_\mu(1-\gamma_5)]_{ab}u_b(\vec{q},s)$$

$$
\begin{aligned}
& \bar{u}_c(\vec{q},s)[(1+\gamma_5)\gamma_\nu]_{cd} u_d(\vec{p},r)\epsilon^\mu \epsilon^{\nu *} \\
= \; & \frac{1}{4}\Big(\sum_{r=1}^{2} u_d(\vec{p},r)\bar{u}_a(\vec{p},r)\Big)[\gamma_\mu(1-\gamma_5)]_{ab} \\
& \Big(\sum_{s=1}^{2} u_b(\vec{q},s)\bar{u}_c(\vec{q},s)\Big)[(1+\gamma_5)\gamma_\nu]_{cd}\epsilon^{\mu *}\epsilon^\nu \; .
\end{aligned}
$$

Primenom izraza za projektore na pozitivno frekventna rešenja (zadatak 4.4) imamo

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4}\sum_{r,s=1}^{2}|\mathcal{M}|^2 = \; & \frac{1}{4}\Big(\frac{\not p + m}{2m}\Big)_{da}[\gamma_\mu(1-\gamma_5)]_{ab} \\
& \Big(\frac{\not q + m}{2m}\Big)_{bc}[(1+\gamma_5)\gamma_\nu]_{cd}\epsilon^\mu \epsilon^{\nu *} \\
= \; & \frac{1}{16m^2}\mathrm{tr}\Big[(\not p + m)\gamma_\mu(1-\gamma_5)(\not q + m)(1+\gamma_5)\gamma_\nu\Big]\epsilon^\mu\epsilon^{\nu *} \; . \qquad (10.3\text{-}1)
\end{aligned}
$$

Koristeći osobinu da γ_5 matrica antikomutira sa γ^μ matricama kao i da je $(\gamma_5)^2 = 1$ izraz (10.3-1) prelazi u

$$
\frac{1}{4}\sum_{r,s=1}^{2}|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{8m^2}\mathrm{tr}\Big[(\not p + m)\gamma_\mu(1-\gamma_5)\not q\gamma_\nu\Big]\epsilon^\mu\epsilon^{\nu *} \; .
$$

Primenom odgovarajućih izraza iz zadatka 3.6 dobija se

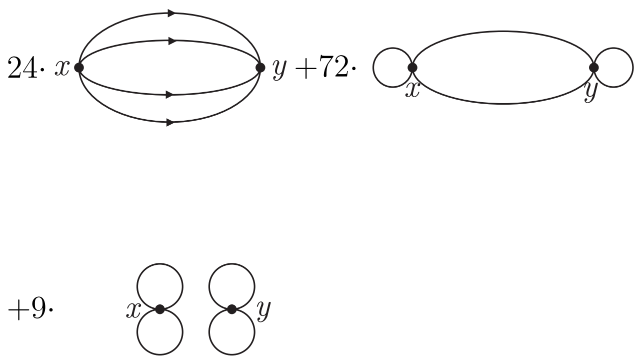
$$
\frac{1}{4}\sum_{r,s=1}^{2}|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{2m^2}\Big[p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu - (p\cdot q)g_{\mu\nu} - i\epsilon_{\alpha\nu\beta\mu}q^\alpha p^\beta\Big]\epsilon^\mu\epsilon^{\nu *} \; .
$$

10.4 U prvom delu zadataka primenićemo Wick-ovu teoremu za bozone a u drugom za fermione.

(i) Jasno je da svi članovi sa normalnim uređenjem otpadaju jer je njihova vakuumska očekivana vrednost jednaka nuli. Preostaju, dakle, samo članovi sa četiri kontrakcije. Ako četiri puta kontrakujemo jedno $\phi(x)$ sa jednim $\phi(y)$ dobićemo $(\langle 0|\, T(\phi(x)\phi(y))\,|0\rangle)^4$. To možemo uraditi na $4! = 24$ načina. Sledeće što možemo da uradimo je da napravimo dve kontrakcije između polja $\phi(x)$ i $\phi(y)$. Jedno polje $\phi(x)$ možemo kontrakovati na 4 načina sa poljem $\phi(y)$. Sledeće $\phi(x)$ polje možemo da kontrakujemo na tri načina sa preostalim $\phi(y)$ poljima. Dobijeni koeficijent moramo još da pomnožimo sa 6, jer je to broj načina na koji možemo da izaberemo dva $\phi(x)$ polja od četiri moguća. Dakle, ukupno imamo $4 \cdot 3 \cdot 6 = 72$ načina. Dva polja $\phi(x)$ možemo međusobno kontrakovati na tri načina, slično važi i za $\phi(y)$ polja, pa je odgovarajući koeficijent 9. Dakle,

$$\begin{aligned}
&\langle 0|\, T(\phi^4(x)\phi^4(y))\,|0\rangle) = 24(\langle 0|\, T(\phi(x)\phi(y))\,|0\rangle)^4 \\
+&\ 72\,\langle 0|\, T(\phi(x)\phi(x))\,|0\rangle\,\langle 0|\, T(\phi(y)\phi(y))\,|0\rangle\,(\langle 0|\, T(\phi(x)\phi(y))\,|0\rangle)^2 \\
+&\ 9(\langle 0|\, T(\phi(x)\phi(x))\,|0\rangle)^2(\langle 0|\, T(\phi(y)\phi(y))\,|0\rangle)^2 \\
=&\ 24(i\Delta_F(x-y))^4 + 72(i\Delta_F(x-x))i\Delta_F(y-y)(i\Delta_F(x-y))^2 \\
+&\ 9(i\Delta_F(x-x))^2(i\Delta_F(y-y))^2\ .
\end{aligned}$$

Poslednji izraz se može grafički predstaviti:



Samo da napomenemo da ako bi se "zabranile" istovremene kontrakcije onda bi preostao samo drugi sabirak u prethodnoj sumi. Preporučujemo vam da nađete $T(:\phi^4(x)::\phi^4(y):)$.

(ii) Primenom Wick-ove teoreme za fermione dobija se

$$\begin{aligned}
&\langle 0|\, T(\bar\psi(x)\psi(x)\bar\psi(y)\psi(y))\,|0\rangle \\
=&\ iS_F(x-x)iS_F(y-y) - iS_F(x-y)iS_F(y-x)\ .
\end{aligned}$$

10.5 (i) Dati dijagram dobija se iz izraza

$$-\frac{i\lambda}{4!}\int d^4y\,\langle 0|\, T(\phi(x_1)\phi(x_2)\phi^4(y))\,|0\rangle\ ,$$

gde $\phi(x_1)$ treba da kontrakujemo sa jednim $\phi(y)$ (to je moguće izvesti na 4 načina), a $\phi(x_2)$ sa jednim od preostala tri $\phi(y)$. Faktor simetrije je dakle $\frac{1}{4!}4\cdot 3 = \frac{1}{2}$. Rezultat se može proveriti preko formule iz postavke zadatka, gde je $g = 1, \alpha = 0$ i $\beta = 1$.

(ii) Ovaj dijagram je jedan od sabiraka u

$$\frac{1}{2!}\Big(-\frac{i\lambda}{4!}\Big)^2\int d^4y_1d^4y_2\,\langle 0|\,T(\phi(x_1)\phi(x_2)\phi^4(y_1)\phi^4(y_2))\,|0\rangle\ ,$$

gde je $\phi(x_1)$ kontrakovano sa jednim od četiri $\phi(y_1)$ (dakle četiri načina); $\phi(x_2)$ sa jednim od tri preostala $\phi(y_1)$ polja (tri načina). Potrebno je još da se naprave dve kontrakcije između $\phi(y_1)$ i $\phi(y_2)$ što se može uraditi na $4\cdot 3 = 12$ načina. Dakle,

$$S^{-1} = 2!\frac{1}{2!}\Big(\frac{1}{4!}\Big)^2 4\cdot 3\cdot 4\cdot 3 = \frac{1}{4}\ ,$$

pa je faktor simetrije $S = 4$. Sa vrednostima $g = 1, \alpha_2 = 1$ i $\beta = 1$ dobija se, primenom formule iz zadatka, ponovo isti rezultat.

(iii) Da bi dobili ovaj dijagram potrebno je da u izrazu

$$\frac{1}{3!}\Big(-\frac{i\lambda}{4!}\Big)^3\int d^4y_1d^4y_2d^4y_3\,\langle 0|\,T(\phi(x_1)\phi(x_2)\phi^4(y_1)\phi^4(y_2)\phi^4(y_3))\,|0\rangle\ , \tag{10.5-1}$$

trećeg reda izvršimo sledeće kontrakcije: $\phi(x_1)$ sa jednim od četiri $\phi(y_1)$ (četiri načina); $\phi(x_2)$ sa jednim od tri preostala $\phi(y_1)$ polja (tri načina); dva $\phi(y_1)$ polja sa četiri $\phi(y_2)$ polja ($4\cdot 2 = 8$ načina); preostalo $\phi(y_1)$ polje sa $\phi(y_3)$ poljima (4 načina); tri kontrakcije između tri $\phi(y_2)$ i tri $\phi(y_3)$ polja ($3\cdot 2 = 6$ načina). Dobijeni izraz potrebno je pomnožiti sa dva zbog simetrije $y_2 \leftrightarrow y_3$. Kombinujući sve faktore imamo:

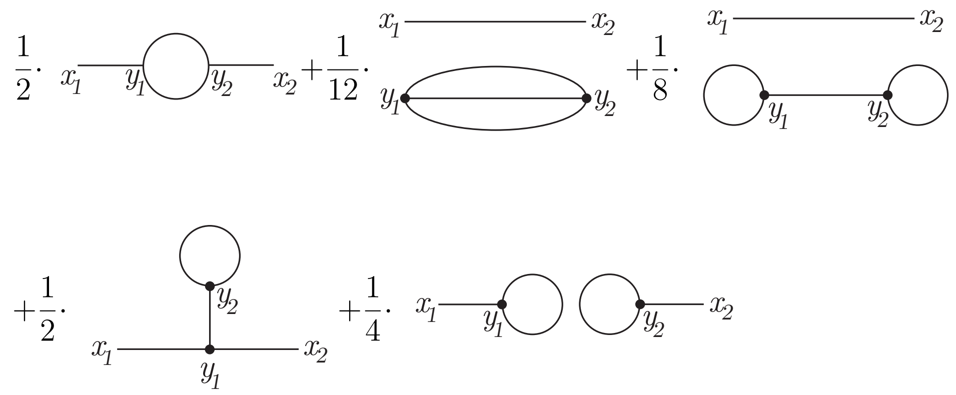
$$S^{-1} = 3!\frac{1}{3!}\Big(\frac{1}{4!}\Big)^3 4\cdot 3\cdot 4\cdot 2\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 2 = \frac{1}{12}\ , \tag{10.5-2}$$

pa je $S = 12$. Rezultat možemo proveriti primenom formule iz postavke zadatka: $g = 2,\ n = 3,\ \alpha_3 = 1,\ \beta = 0$.

10.6 Rezultat je

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Big(\frac{-i\lambda}{3!}\Big)^2\langle 0|\,T(\phi(x_1)\phi(x_2)\int d^4y_1d^4y_2\phi^3(y_1)\phi^3(y_2))\,|0\rangle =\\
= &\int d^4y_1d^4y_2(-i\lambda)^2\Big[\frac{1}{2}i\Delta_F(x_1-y_1)i\Delta_F(x_2-y_2)(i\Delta_F(y_1-y_2))^2\\
+ &\frac{1}{12}i\Delta_F(x_1-x_2)(i\Delta_F(y_1-y_2))^3\\
+ &\frac{1}{8}i\Delta_F(x_1-x_2)i\Delta_F(y_1-y_1)i\Delta_F(y_2-y_2)i\Delta_F(y_1-y_2)\\
+ &\frac{1}{2}i\Delta_F(x_1-y_1)i\Delta_F(x_2-y_1)i\Delta_F(y_1-y_2)i\Delta_F(y_2-y_2)\\
+ &\frac{1}{4}i\Delta_F(x_1-y_1)i\Delta_F(x_2-y_2)i\Delta_F(y_1-y_1)i\Delta_F(y_2-y_2)\Big]
\end{aligned} \tag{10.6-1}$$

što se može dijagramski predstaviti kao na slici.

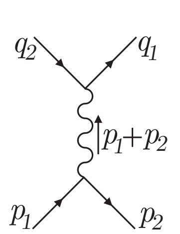


Koeficijent $\frac{1}{2}$ u prvom sabirku (10.6-1) je dobijen na sledeći način: Kontrakciju $\phi(x_1)$ sa $\phi(y_1)$ možemo da izvršimo na tri načina, što važi i za kontrakciju $\phi(x_2)$ sa $\phi(y_2)$. Dve kontrakcije $\phi(y_1)$ sa $\phi(y_2)$ mogu se izvršiti na dva načina. Dobijeni rezultat treba još pomnožiti sa 2! što potiče od zamene verteksa y_1 sa y_2, jer na primer mogli smo $\phi(x_1)$ kontrakovati sa $\phi(y_2)$ umesto sa $\phi(y_1)$. Dakle, ukupni koeficijent je

$$\frac{1}{2}\frac{3\cdot 3\cdot 2}{3!\cdot 3!}\cdot 2=\frac{1}{2}\ . \tag{10.6-2}$$

Kod drugog i trećeg dijagrama nema ekstra množenja sa 2 usled izmene $y_1 \leftrightarrow y_2$!

10.7 (i) Dijagram za ovaj proces prikazan je na slici,



odakle je Feynman-ova amplituda data sa

$$\mathcal{M}=\frac{ie^2}{(p_1+p_2)^2+i\epsilon}\bar{v}(\vec{p}_2,s)\gamma^\mu u(\vec{p}_1,r)\bar{u}(\vec{q}_1,r')\gamma_\mu v(\vec{q}_2,s')\ ,$$

pa je

$$
\begin{aligned}
\left\langle |\mathcal{M}|^2 \right\rangle &= \frac{e^4}{4}\frac{1}{(p_1+p_2)^4}\sum_{r,s=1}^{2}\sum_{r',s'=1}^{2}\bar{v}_a(\vec{p}_2,s)\gamma^\mu_{ab}u_b(\vec{p}_1,r) \\
&\quad \bar{u}_c(\vec{q}_1,r')(\gamma_\mu)_{cd}v_d(\vec{q}_2,s')\bar{u}_e(\vec{p}_1,r)\gamma^\nu_{ef}v_f(\vec{p}_2,s) \\
&\quad \bar{v}_g(\vec{q}_2,s')(\gamma_\nu)_{gh}u_h(\vec{q}_1,r') \\
&= \frac{e^4}{4(p_1+p_2)^4}\sum_s \Big(v_f(\vec{p}_2,s)\bar{v}_a(\vec{p}_2,s)\Big)\gamma^\mu_{ab} \\
&\quad \cdot\sum_r \Big(u_b(\vec{p}_1,r)\bar{u}_e(\vec{p}_1,r)\Big)(\gamma^\nu)_{ef} \\
&\quad \cdot\sum_{r'} \Big(u_h(\vec{q}_1,r')\bar{u}_c(\vec{q}_1,r')\Big)(\gamma_\mu)_{cd} \\
&\quad \cdot\sum_{s'} \Big(v_d(\vec{q}_2,s')\bar{v}_g(\vec{q}_2,s')\Big)(\gamma_\nu)_{gh}\ .
\end{aligned}
$$

Matrično množenje daje nam dva traga u predhodnom izrazu, pa je (zadatak 4.4)

$$
\begin{aligned}
\left\langle |\mathcal{M}|^2 \right\rangle &= \frac{e^4}{4(p_1+p_2)^4}\frac{1}{16m_e^2m_\mu^2}\mathrm{tr}[(\not{q}_1+m_e)\gamma_\mu(\not{q}_2-m_e)\gamma_\nu] \\
&\quad \mathrm{tr}[(\not{p}_2-m_\mu)\gamma^\mu(\not{p}_1+m_\mu)\gamma^\nu]\ .
\end{aligned}
$$

Primenom odgovarajućih identiteta iz zadatka 3.6 dobijamo

$$
\begin{aligned}
\left\langle |\mathcal{M}|^2 \right\rangle &= \frac{e^4}{4(p_1+p_2)^4}\frac{1}{m_e^2m_\mu^2}\Big[q_{1\mu}q_{2\nu}+q_{2\mu}q_{1\nu}-(q_1\cdot q_2)g_{\mu\nu}-m_e^2g_{\mu\nu}\Big] \\
&\quad \Big[p_1^\mu p_2^\nu+p_2^\mu p_1^\nu-(p_1\cdot p_2)g^{\mu\nu}-m_\mu^2g^{\mu\nu}\Big]\ .
\end{aligned}
$$

Množenjem i sređivanjem poslednjeg izraza dobija se

$$
\begin{aligned}
\left\langle |\mathcal{M}|^2 \right\rangle &= \frac{e^4}{4(p_1+p_2)^4m_e^2m_\mu^2}\Big[2(p_2\cdot q_1)(p_1\cdot q_2)+2(p_2\cdot q_2)(p_1\cdot q_1) \\
&+\ 2m_e^2(p_1\cdot p_2)+2m_\mu^2(q_1\cdot q_2)+4m_e^2m_\mu^2\Big]\ . \qquad (10.7\text{-}1)
\end{aligned}
$$

U sistemu CM četvoroimpulsi su

$$
p_1=(E,0,0,p)\ p_2=(E,0,0,-p)\ ,
$$

$$
q_1=(E',q\sin\theta,0,q\cos\theta)\ q_2=(E',-q\sin\theta,0,-q\cos\theta)\ .
$$

gde su p i q intenziteti odgovarajućih trovektora impulsa. Nakon jednostavnog računanja skalarnih proizvoda u (10.7-1) dobija se

$$\begin{aligned}\left\langle|\mathcal{M}|^2\right\rangle &= \frac{e^4}{32E^4m_e^2m_\mu^2}\Big[2((EE')^2+m_e^2m_\mu^2)(1+\cos^2\theta) \\ &+ 2(E^2m_e^2+E'^2m_\mu^2)(1-\cos^2\theta)-m_e^4-m_\mu^4\Big] \; . \qquad (10.7\text{-}2)\end{aligned}$$

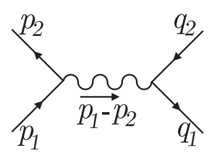
U ultrarelativističkom limesu ($p \approx E$) izraz (10.7-2) postaje

$$\left\langle|\mathcal{M}|^2\right\rangle = \frac{e^4}{16m_e^2m_\mu^2}(1+\cos^2\theta) \; . \qquad (10.7\text{-}3)$$

Na osnovu predhodnog izraza i zadatka 10.1 diferencijalni efikasni presek je

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{256\pi^2E^2}(1+\cos^2\theta) \; .$$

(ii) Navešćemo samo glavne rezultate. Na osnovu dijagrama



amplituda je

$$\mathcal{M} = \bar{u}(\vec{p}_2,r_2)(ie\gamma^\mu)u(\vec{p}_1,r_1)\frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1-p_2)^2+i\epsilon}\bar{v}(\vec{q}_1,s_1)(ie\gamma^\nu)v(\vec{q}_2,s_2) \; .$$

Kvadrata modula Feynman-ove amplitude usrednjen po spinskim stanjima inicijalnih i sumiran po spiskim stanjima finalnih čestica je:

$$\begin{aligned}\left\langle|\mathcal{M}|^2\right\rangle &= \frac{e^4}{4(p_1-p_2)^4}\frac{1}{16m_e^2m_\mu^2}\mathrm{tr}\Big[(\not{p}_2+m_e)\gamma^\mu(\not{p}_1+m_e)\gamma^\nu\Big] \\ &\quad \mathrm{tr}\Big[(\not{q}_1-m_\mu)\gamma_\mu(\not{q}_2-m_\mu)\gamma_\nu\Big] \\ &= \frac{e^4}{2(p_1-p_2)^4m_e^2m_\mu^2}\Big[(p_2\cdot q_1)(p_1\cdot q_2)+(p_1\cdot q_1)(p_2\cdot q_2) \\ &- m_\mu^2(p_1\cdot p_2)-m_e^2(q_1\cdot q_2)+2m_e^2m_\mu^2\Big] \; .\end{aligned}$$

Konačno u sistemu centra mase, u ultraralativističkom limesu imamo:

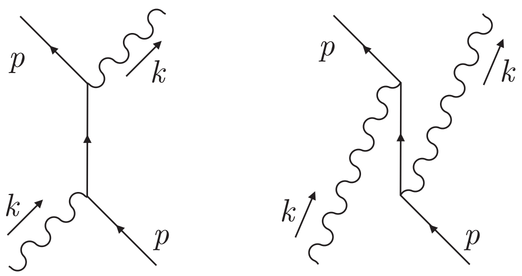
$$\left\langle |\mathcal{M}|^2 \right\rangle = \frac{e^4}{8m_e^2 m_\mu^2} \frac{4 + (1 + \cos\theta)^2}{(1 - \cos\theta)^2} \ . \tag{10.7-4}$$

Diferencijalni efikasni presek u sistemu centra masa je

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{128\pi^2 E^2} \frac{4 + (1 + \cos\theta)^2}{(1 - \cos\theta)^2} \ . \tag{10.7-5}$$

Primetite da za $\theta \approx 0$ diferencijalni presek divergira. To je posledica činjenice da je za te uglove dominantan doprinos virtuelnog fotona u izrazu za $\mathcal{M}$, koji je divergentan, jer je $k^2 = (p_1 - p_2)^2 \approx 0$.

10.8 Comptonovo rasejanje je proces $e^-\gamma \to e^-\gamma$. Dominantan doprinos ovom rasejanju daju dva dijagrama:



pa je Feynman-ova amplituda

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= \bar{u}(\vec{p}', s')(ie\gamma^\mu)\epsilon_\mu^{\lambda'*}(\vec{k}')\frac{i(\not{p} + \not{k} + m)}{(p+k)^2 - m^2}(ie\gamma^\nu)\epsilon_\nu^\lambda(\vec{k})u(\vec{p}, s) \\
&+ \bar{u}(\vec{p}', s')(ie\gamma^\nu)\epsilon_\nu^\lambda(\vec{k})\frac{i(\not{p} - \not{k}' + m)}{(p-k')^2 - m^2}(ie\gamma^\mu)\epsilon_\mu^{\lambda'*}(\vec{k}')u(\vec{p}, s) \\
&= -ie^2\epsilon_\mu^{\lambda'*}(\vec{k}')\epsilon_\nu^\lambda(\vec{k})\bar{u}(\vec{p}', s')\left[\frac{\gamma^\mu(\not{p} + \not{k} + m)\gamma^\nu}{(p+k)^2 - m^2}\right. \\
&\left. + \frac{\gamma^\nu(\not{p} - \not{k}' + m)\gamma^\mu}{(p-k')^2 - m^2}\right] u(\vec{p}, s)
\end{aligned}$$

Pre nego što kvadriramo ovaj izraz, izvršićemo nekoliko pojednostavljenja. Pošto je $p^2 = m^2$ i $k^2 = 0$, imenioci od propagatorâ su

$$(p+k)^2 - m^2 = 2p \cdot k \quad \text{i} \quad (p-k')^2 - m^2 = -2p \cdot k'.$$

Brojioci se takođe mogu pojednostaviti, pošto je

$$\begin{aligned}
(\not{p} + m)\gamma^\nu u(p) &= (\gamma^\mu p_\mu + m)\gamma^\nu u(p) = (2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu\gamma^\mu)p_\mu u(p) + m\gamma^\nu u(p) \\
&= 2p^\nu u(p) - \gamma^\nu(\not{p} - m)u(p) = 2p^\nu u(p).
\end{aligned}$$

Uz ova dva pojednostavljenja, Feynman-ova amplituda je

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= -ie^2\epsilon_\mu^{\lambda'^*}(\vec{k}')\epsilon_\nu^\lambda(\vec{k})\bar{u}(\vec{p}', s')\left[\frac{\gamma^\mu \not{k}\gamma^\nu + 2\gamma^\mu p^\nu}{2p\cdot k} + \frac{-\gamma^\nu \not{k}\gamma^\mu + 2\gamma^\nu p^\mu}{-2p\cdot k'}\right]u(\vec{p}, s)\\ &= -ie^2\epsilon_\mu^{\lambda'^*}(\vec{k}')\epsilon_\nu^\lambda(\vec{k})\bar{u}(\vec{p}', s')A^{\mu\nu}u(\vec{p}, s)\ , \qquad (10.8\text{-}1)\end{aligned}$$

pri čemu smo uveli oznaku

$$A^{\mu\nu} = \frac{\gamma^\mu \not{k}\gamma^\nu + 2\gamma^\mu p^\nu}{2p\cdot k} + \frac{-\gamma^\nu \not{k}'\gamma^\mu + 2\gamma^\nu p^\mu}{-2p\cdot k'}. \qquad (10.8\text{-}2)$$

Kao i do sada računaćemo kvadrat Feynman-ovu amplitude usrednjen po spinovima elektrona i polarizacijama fotona inicijanih čestica i prosumiran po spinovima elektrona i polarizacijama fotona finalnih čestica. Sumiranje po spinovima elektrona je isto kao i do sada, dok se sumiranje po polarizacijama fotona svodi na

$$\sum_{\lambda=1,2}\epsilon_\mu^{\lambda^*}(k)\epsilon_\nu^\lambda(k) \to -g_{\mu\nu},$$

jer preostala dva člana iz (9.E) ne daju doprinos. Nama treba $\langle|\mathcal{M}|^2\rangle$. Zato najpre računamo $|\mathcal{M}|^2 = \mathcal{M}^*\mathcal{M} = \mathcal{M}^\dagger\mathcal{M}$. Imamo da je

$$\mathcal{M}^\dagger = ie^2\epsilon_\mu^{\lambda'}(\vec{k}')\epsilon_\nu^{\lambda^*}(\vec{k})(\bar{u}(\vec{p}', s')A^{\mu\nu}u(\vec{p}, s))^\dagger.$$

Ostaje još da se izračuna

$$(u^\dagger(\vec{p}', s')\gamma_0 A^{\mu\nu}u(\vec{p}, s))^\dagger = u^\dagger(\vec{p}, s)A^{\dagger\mu\nu}\gamma_0 u(\vec{p}', s') = \bar{u}(\vec{p}, s)B^{\mu\nu}u(\vec{p}', s').$$

Ovde smo uveli novu oznaku

$$B^{\mu\nu} = \gamma^0 A^{\dagger\mu\nu}\gamma^0 = \frac{\gamma^\nu \not{k}\gamma^\mu + 2\gamma^\mu p^\nu}{2p\cdot k} + \frac{-\gamma^\mu \not{k}'\gamma^\nu + 2\gamma^\nu p^\mu}{-2p\cdot k'}. \qquad (10.8\text{-}3)$$

Kvadrat usrednjene amlitude je

$$\begin{aligned}\langle|\mathcal{M}|^2\rangle &= \frac{e^4}{4}\sum_{r,s}\sum_{r',s'}\epsilon_\mu^{\lambda'^*}(\vec{k}')\epsilon_\nu^\lambda(\vec{k})\bar{u}(\vec{p}', s')A^{\mu\nu}u(\vec{p}, s)\\ &\qquad \cdot\epsilon_\rho^{\lambda'}(\vec{k}')\epsilon_\sigma^{\lambda^*}(\vec{k})\bar{u}(\vec{p}, s)B^{\rho\sigma}u(\vec{p}', s')\\ &= \frac{e^4}{4}\sum_{s,s'}g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}\bar{u}(\vec{p}', s')A^{\mu\nu}u(\vec{p}, s)\bar{u}(\vec{p}, s)B^{\rho\sigma}u(\vec{p}', s')\\ &= \frac{e^4}{4}\sum_{s,s'}\bar{u}(\vec{p}', s')A^{\mu\nu}u(\vec{p}, s)\bar{u}(\vec{p}, s)B_{\mu\nu}u(\vec{p}', s') \qquad (10.8\text{-}4)\\ &= \frac{e^4}{4}\mathrm{tr}\left[\frac{\not{p}' + m}{2m}A^{\mu\nu}\frac{\not{p} + m}{2m}B_{\mu\nu}\right] \qquad (10.8\text{-}5)\end{aligned}$$

Vraćanjem izraza (10.8-2) i (10.8-3) u (10.8-5), dobija se

$$\begin{aligned}\langle|\mathcal{M}|^2\rangle = \ & \frac{e^4}{16m^2}\mathrm{tr}\left\{(\not{p}'+m)\left[\frac{\gamma^\mu\not{k}\gamma^\nu+2\gamma^\mu p^\nu}{2p\cdot k}+\frac{\gamma^\nu\not{k}'\gamma^\mu-2\gamma^\nu p^\mu}{2p\cdot k'}\right]\right.\\ & \left.(\not{p}+m)\left[\frac{\gamma_\nu\not{k}\gamma_\mu+2\gamma_\mu p_\nu}{2p\cdot k}+\frac{\gamma_\mu\not{k}'\gamma_\nu-2\gamma_\nu p_\mu}{2p\cdot k'}\right]\right\}\end{aligned}$$

Kada se izvrše množenja pod tragom dobijaju se četiri sabirka

$$\langle|\mathcal{M}|^2\rangle = \frac{e^4}{16m^2}\left[\frac{\mathbf{I}}{(2p\cdot k)^2}+\frac{\mathbf{II}}{(2p\cdot k)(2p\cdot k')}+\frac{\mathbf{III}}{(2p\cdot k')(2p\cdot k)}+\frac{\mathbf{IV}}{(2p\cdot k')^2}\right]. \tag{10.8-6}$$

gde su **I**, **II**, **III** i **IV** relativno komplikovani tragovi. Ipak, mogu se uočiti određene simetrije među njima. Trag **IV** jednak je tragu **I** ako se k' zameni sa $-k$, a zbog cikličnih permutacija pod tragom, može se pokazati da je **II** = **III**. Znači dovoljno je razmotriti samo **I** i **II**. U tragu

$$\mathbf{I} = \mathrm{tr}[(\not{p}'+m)(\gamma^\mu\not{k}\gamma^\nu+2\gamma^\mu p^\nu)(\not{p}+m)(\gamma_\nu\not{k}\gamma_\mu+2\gamma_\mu p_\nu)]$$

imamo 16 sabiraka, ali pola ih otpada, jer su to tragovi neparnog broja γ–matrica. Preostaje da se izračuna 8 tragova. Na primer

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}[\not{p}'\gamma^\mu\not{k}\gamma^\nu\not{p}\gamma_\nu\not{k}\gamma_\mu] &= \mathrm{tr}[(-2\not{p}')\not{k}(-2\not{p})\not{k}]\\ &= 4\mathrm{tr}[\not{p}'\not{k}(2p\cdot k-\not{k}\not{p})]\\ &= 8(p\cdot k)\mathrm{tr}(\not{p}'\not{k})-4k^2\mathrm{tr}(\not{p}'\not{p})\\ &= 32(p\cdot k)(p'\cdot k).\end{aligned}$$

Ovde se koriste ciklične permutacije pod tragom, kontrakcioni identiteti (Zadatak **3.5**) kao i činjenica da je $\not{p}\not{p}=p^2=m^2$ i $\not{k}\not{k}=k^2=0$. Kada se izvrše sva izračunavanja sa tragovima, dobije se

$$\mathbf{I} = 16\left[4m^2-2m^2p\cdot p'+4m^2p\cdot k-2m^2p'\cdot k+(p\cdot k)(p'\cdot k)\right].$$

Ovaj izraz se može uprostiti ako uvedemo Mandelstam-ove varijable

$$\begin{aligned}s &= (p+k)^2=(p'+k')^2=2p\cdot k+m^2=2p'\cdot k'+m^2;\\ t &= (p'-p)^2=(k'-k)^2=-2p'\cdot p+2m^2=-2k'\cdot k;\\ u &= (p'-k)^2=(k'-p)^2=-2p\cdot k'+m^2=-2p'\cdot k+m^2.\end{aligned} \tag{10.8-7}$$

Korišćenjem ovih relacija uz identitet $s+t+u=2m^2$ dobija se

$$\mathbf{I} = 16\left[2m^4+m^2(u-m^2)-\frac{1}{2}(s-m^2)(u-m^2)\right]. \tag{10.8-8}$$

Zamena $k \leftrightarrow -k'$ je ekvivalentna sa zamenom $s \leftrightarrow u$, pa je

$$\mathbf{IV} = 16\left[2m^4 + m^2(s-m^2) - \frac{1}{2}(s-m^2)(u-m^2)\right]. \tag{10.8-9}$$

Slična procedura daje

$$\mathbf{II} = \mathbf{III} = -8\left[4m^4 + m^2(s-m^2) + m^2(u-m^2)\right]. \tag{10.8-10}$$

Ako se (10.8-8), (10.8-9) i (10.8-10) uvrste u (10.8-6) a pri tome se s i u izraze preko $p \cdot k$ i $p \cdot k'$ konačno dobijamo

$$\langle|\mathcal{M}|^2\rangle = \frac{e^4}{2m^2}\left[\frac{p\cdot k'}{p\cdot k} + \frac{p\cdot k}{p\cdot k'} + 2m^2\left(\frac{1}{p\cdot k'} - \frac{1}{p\cdot k}\right) + m^4\left(\frac{1}{p\cdot k'} - \frac{1}{p\cdot k}\right)^2\right] \tag{10.8-11}$$

Da bismo našli diferencijani presek treba da izaberemo sistem reference. Compton-ovo rasejanje se najčešće posmatra u „lab” sistemu. Naš zadatak da nađemo presek u funkciji od ω i θ. Zato ćemo naći energiju finalnog fotona koristeći sledeći trik

$$\begin{aligned} m^2 &= (p')^2 = (p+k-k')^2 = p^2 + 2p\cdot(k-k') - 2k\cdot k' \\ &= m^2 + 2m(\omega-\omega') - 2\omega\omega'(1-\cos\theta), \end{aligned}$$

pa je

$$\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} = \frac{1}{m}(1-\cos\theta) \Rightarrow \omega' = \frac{\omega}{1+\frac{\omega}{m}(1-\cos\theta)}. \tag{10.8-12}$$

Diferencijalni presek kada imamo dve inicijalne i dve finalne čestice je

$$d\sigma = \frac{\langle|\mathcal{S}_{fi}|^2\rangle}{T}\frac{Vd^3\vec{p}'}{(2\pi)^3}\frac{Vd^3\vec{k}'}{(2\pi)^3}\frac{1}{\frac{|\vec{v}_1-\vec{v}_2|}{V}}, \tag{10.8-13}$$

pri čemu je

$$\langle|\mathcal{S}_{fi}|^2\rangle = (2\pi)^8\delta^4(k'+p'-k-p)\frac{TV}{(2\pi)^4}\frac{m}{mV}\frac{m}{E'V}\frac{1}{2V\omega}\frac{1}{2V\omega'}\langle|\mathcal{M}|^2\rangle. \tag{10.8-14}$$

Pošto je $|\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = 1$, onda (10.8-13) postaje

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{T}(2\pi)^4\delta^4(k'+p'-k-p)TV\frac{m}{4V^4E'\omega\omega'}\langle|\mathcal{M}|^2\rangle \\ &\quad \frac{Vd^3\vec{p}'}{(2\pi)^3}\frac{Vd^3\vec{k}'}{(2\pi)^3}V \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{m}{4(2\pi)^2 E'\omega\omega'}\delta(\omega' + (m^2 + \underbrace{\omega^2 + (\omega')^2 - 2\omega\omega'\cos\theta}_{\vec{p'}^2})^{1/2} \\
&\quad -\omega - m)(\omega')^2 d\omega' d\Omega \langle|\mathcal{M}|^2\rangle \\
&= \frac{md(\cos\theta)}{8\pi E'\omega}\frac{\omega'}{\left|1 + \dfrac{\omega' - \omega\cos\theta}{E'}\right|}\langle|\mathcal{M}|^2\rangle \\
&= \frac{m\omega' d(\cos\theta)}{8\pi\omega}\frac{1}{E' + \omega' - \omega\cos\theta}\langle|\mathcal{M}|^2\rangle \\
&= \frac{m\omega' d(\cos\theta)}{8\pi\omega}\frac{1}{m + \omega - \omega\cos\theta}\langle|\mathcal{M}|^2\rangle \\
&= \frac{m\omega' d(\cos\theta)}{8\pi\omega}\frac{\omega'}{m\omega}\langle|\mathcal{M}|^2\rangle = \frac{d(\cos\theta)}{8\pi}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2\langle|\mathcal{M}|^2\rangle \qquad (10.8\text{-}15)
\end{aligned}
$$

Sada ćemo izračunati $\langle|\mathcal{M}|^2\rangle$ u „lab” sistemu. To se zapravo svodi na zamenjivanje $p \cdot k = m\omega$ i $p \cdot k' = m\omega'$ u (10.8-11)

$$
\begin{aligned}
\langle|\mathcal{M}|^2\rangle &= \frac{e^4}{2m^2}\left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} + 2m\left(\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega}\right) + m^2\left(\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega}\right)^2\right] \\
&= \frac{e^4}{2m^2}\left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta\right], \qquad (10.8\text{-}16)
\end{aligned}
$$

pa je konačno

$$
\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{m^2}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2\left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta\right],
$$

gde je $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ – konstanta fine strukture. Ovo je poznata Klein-Nishina formula. U nerelativističkom limesu $\omega \to 0 \Leftrightarrow \frac{\omega'}{\omega} \to 1$ ona prelazi u Thompsonovu formulu

$$
\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{m^2}(1 + \cos^2\theta); \quad \sigma_{\text{tot}} = \frac{8\pi\alpha^2}{3m^2}.
$$

10.9 Inicijalno stanje, $|i\rangle = c^\dagger(\vec{p}_i, r)\,|0\rangle$ je elektron impulsa p_i i polarizacije r, dok je finalno stanje u procesu elektron impulsa $\vec{p}_f$ i polarizacije s, tj. $|f\rangle = c^\dagger(\vec{p}_f, s)\,|0\rangle$. Matrični element amplitude prelaza je:

$$
S_{fi} = ie\int d^4x\,\langle f|\,\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)\,|i\rangle\, A^\mu(x)\ , \qquad (10.9\text{-}1)
$$

gde su ψ i $\bar{\psi}$ operatori polja dok je A^μ klasično elektromagnetno polje.

(i) Iz (10.9-1) dobija se

$$S_{fi} = iea\sqrt{\frac{m}{E_iV}}\sqrt{\frac{m}{E_fV}}\int d^4x\bar{u}(\vec{p}_f,s)\gamma_0 u(\vec{p}_i,r)e^{-ip_ix+ip_fx}e^{-k^2\vec{x}^2} \ . \tag{10.9-2}$$

Kako je

$$\int d^3xe^{-k^2\vec{x}^2+i(\vec{p}_i-\vec{p}_f)\vec{x}} = \Big(\frac{\pi}{k^2}\Big)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{(\vec{p}_i-\vec{p}_f)^2}{4k^2}} \ ,$$

to je

$$\begin{aligned} S_{fi} &= iea\sqrt{\frac{m}{E_iV}}\sqrt{\frac{m}{E_fV}}\Big(\frac{\pi}{k^2}\Big)^{\frac{3}{2}}2\pi\delta(E_i-E_f) \\ &\quad e^{-\frac{(\vec{p}_i-\vec{p}_f)^2}{4k^2}}\bar{u}(\vec{p}_f,s)\gamma_0 u(\vec{p}_i,r) \ . \end{aligned} \tag{10.9-3}$$

Delta funkcija u ampitudi prelaza (10.9-3) ukazuje na zakon održanja energije, koji važi zato što potencijal polja A^μ ne zavisi od vremena. Kako prostor nije homogen, jer potencijal zavisi od $\vec{x}$ to zakon održanja troimpulsa ne važi. Srednja vrednost kvadrata modula amplitude prelaza se dobija iz (10.9-3)

$$\begin{aligned} \Big\langle|S_{fi}|^2\Big\rangle &= \frac{1}{2}\frac{e^2m^2a^2}{V^2E_iE_f}2\pi T\delta(E_i-E_f)\Big(\frac{\pi}{k^2}\Big)^3 \\ &\quad e^{-\frac{(\vec{p}_i-\vec{p}_f)^2}{2k^2}}\sum_{r,s=1}^{2}|u(\vec{p}_f,s)\gamma_0 u(\vec{p}_i,r)|^2 \ . \end{aligned} \tag{10.9-4}$$

Kako je

$$\Big(\bar{u}(\vec{p}_f,s)\gamma_0 u(\vec{p}_i,r)\Big)^* = \bar{u}(\vec{p}_i,r)\gamma_0 u(\vec{p}_f,s) \ ,$$

to je:

$$\begin{aligned} &\sum_{r,s=1}^{2}|\bar{u}(\vec{p}_f,s)\gamma_0 u(\vec{p}_i,r)|^2 \\ &= \sum_{r=1}^{2}\Big(u_a(\vec{p}_f,s)\bar{u}_b(\vec{p}_f,s)\Big)\gamma^0_{bc}\sum_{r=1}^{2}\Big(u_c(\vec{p}_i,r)\bar{u}_d(\vec{p}_f,r)\Big)\gamma^0_{da} \\ &= \frac{1}{4m^2}\mathrm{tr}[(\not{p}_f+m)\gamma^0(\not{p}_i+m)\gamma^0] \\ &= \frac{1}{m^2}(E_iE_f+\vec{p}_i\vec{p}_f+m^2) \ . \end{aligned} \tag{10.9-5}$$

Zamenom (10.9-5) u (10.9-4) dobija se

$$\begin{aligned} \Big\langle|S_{fi}|^2\Big\rangle &= \frac{e^2a^2\pi}{V^2E_iE_f}\Big(\frac{\pi}{k^2}\Big)^3T\delta(E_i-E_f) \\ &\quad e^{-\frac{(\vec{p}_i-\vec{p}_f)^2}{2k^2}}(E_iE_f+|\vec{p}_i||\vec{p}_f|\cos\theta+m^2) \ . \end{aligned} \tag{10.9-6}$$

Zamenom (10.9-6) u izraz za efikasni presek,

$$d\sigma = \frac{|S_{fi}|^2}{T}\frac{VE_i}{|\vec{p}_i|}\frac{Vd^3p_f}{(2\pi)^3} \ ,$$

dobija se

$$\begin{aligned} d\sigma \ = \ & \frac{e^2a^2\pi}{8k^6}\Big(E_iE_f + |\vec{p}_i||\vec{p}_f|\cos\theta + m^2\Big) \\ & \exp\Big(- |\vec{p}_i|^2\frac{1-\cos\theta}{k^2}\Big)\delta(E_f - E_i)\frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{p}_i|}dE_f d\Omega \ . \end{aligned}$$

Integracijom po E_f dobijamo izraz za diferencijalni presek

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^2a^2\pi}{8k^6}\Big(E_i^2 + |\vec{p}|^2\cos\theta + m^2\Big)e^{-|\vec{p}|^2\frac{1-\cos\theta}{k^2}} \ .$$

(ii) Ovaj zadatak je analogan predhodnom, pa ćemo samo navesti glavne korake. Ampliduda prelaza je

$$S_{fi} = -\frac{2iegm}{V\sqrt{E_iE_f}}(2\pi)\delta(E_f - E_i)\frac{1}{\vec{q}^2 + \frac{1}{a^2}}\bar{u}(\vec{p}_f, s)\gamma^3 u(\vec{p}_i, r) \ .$$

Pokažite da je

$$\begin{aligned} \sum_{r,s=1}^{2}|\bar{u}(\vec{p}_f,s)\gamma^3 u(\vec{p}_i,r)|^2 \ &= \ \frac{1}{4m^2}\mathrm{tr}[(\not{p}_f + m)\gamma^3(\not{p}_i + m)\gamma^3] \\ &= \ \frac{1}{m^2}(2p_i^3p_f^3 + p_i\cdot p_f - m^2) \\ &= \ \frac{1}{m^2}(E_iE_f + |\vec{p}_i||\vec{p}_f|\cos\theta - m^2) \ . \end{aligned}$$

Srednja vrednost kvadrata modula amplitude prelaza je

$$\Big\langle|S_{fi}|^2\Big\rangle = \frac{4\pi e^2g^2T}{V^2E_iE_f}\frac{1}{\Big(\vec{q}^2 + \frac{1}{a^2}\Big)^2}\delta(E_f - E_i)(E_iE_f + |\vec{p}_i||\vec{p}_f|\cos\theta - m^2) \ .$$

Diferencijalni presek je

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^2g^2}{2\pi^2}\frac{(E^2 - m^2)(1+\cos\theta)}{\Big(\frac{1}{a^2} + 2(E^2 - m^2)(1-\cos\theta)\Big)^2} \ .$$

10.10 Inicijalno stanje je vakuum $|0\rangle$, dok je finalno stanje

$$|f\rangle = c^\dagger(\vec{p}_1, r)d^\dagger(\vec{p}_2, s)\,|0\rangle \ .$$

Amplituda prelaza je

$$\begin{aligned}S_{fi} \ &= \ \frac{ie}{V}\int d^4x \sum_{r's'}\int d^3q_1 d^3q_2 \sqrt{\frac{m}{E_{q_1}}}\sqrt{\frac{m}{E_{q_2}}}\,\langle 0|\, d(\vec{p}_2, s)c(\vec{p}_1, r) \\ &\quad (c^\dagger(\vec{q}_1, r')d^\dagger(\vec{q}_2, s')\bar{u}(\vec{q}_1, r')\gamma^\mu A_\mu(x)v(\vec{q}_2, s')e^{iq_1x+iq_2x} + ...)\,|0\rangle \ ,\end{aligned}$$

gde sabirke koji daju nulti doprinos amplitudi nismo pisali. Sređivanjem prethodnog izraza dobija se

$$\begin{aligned}S_{fi} \ &= \ ie\frac{ma}{V\sqrt{E_1E_2}}\int d^4x \ \bar{u}(\vec{p}_1, r)\gamma_2 v(\vec{p}_2, s)e^{i(p_2+p_1)x}e^{-i\omega t} \\ &= \ ie(2\pi)^4\frac{ma}{V\sqrt{E_1E_2}} \\ &\quad \bar{u}(\vec{p}_1, r)\gamma_2 v(\vec{p}_2, s)\delta^{(3)}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)\delta(E_1 + E_2 - \omega) \ .\end{aligned}$$

Srednja vrednost kvadrata amplitude prelaza je

$$\begin{aligned}\left\langle |S_{fi}|^2 \right\rangle \ &= \ (2\pi)^4 TV\delta^{(3)}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)\delta(E_1 + E_2 - \omega) \\ &\quad \frac{e^2a^2}{4V^2E_1E_2}\mathrm{tr}[(\not{p}_1 + m)\gamma_2(\not{p}_2 - m)\gamma_2] \\ &= \ (2\pi)^4 T\delta^{(3)}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)\delta(E_1 + E_2 - \omega)\frac{e^2a^2}{VE_1E_2} \\ &\quad (E_1E_2 + |\vec{p}_1||\vec{p}_2| - 2|\vec{p}_1||\vec{p}_2|\sin^2\theta\cos^2\phi + m^2) \ .\end{aligned}$$

Četvoroimpulsi su

$$p_1^\mu = (E_1, p_1\sin\theta\cos\phi, p_1\sin\theta\sin\phi, p_1\cos\theta) \ ,$$

$$p_2^\mu = (E_2, -p_2\sin\theta\cos\phi, -p_2\sin\theta\sin\phi, -p_2\cos\theta) \ .$$

Diferencijalni presek je

$$d\sigma = \frac{\langle |S_{fi}|^2\rangle}{T}\frac{Vd^3p_1}{(2\pi)^3}\frac{Vd^3p_2}{(2\pi)^3} \ .$$

Integracijom po $\vec{p}_2$ i $\vec{p}_1$ dobija se presek za rasejanje (u jedinici zapremine)

$$\sigma = \frac{e^2a^2}{3\pi\omega}(\omega^2 + 2m^2)\sqrt{\frac{\omega^2}{4} - m^2} \ .$$

10.11 Amplituda prelaza je

$$S_{fi} = \frac{ieam}{V}\frac{1}{\sqrt{E_iE_f}}\bar{u}(\vec{p}_f,s)\gamma_3(1-\gamma_5)u(\vec{p}_i,r)\int d^4x\; e^{-ip_ix+ip_fx}e^{-k^2\vec{x}^2}\;.$$

Integracijom po t i $\vec{x}$ dobijamo

$$\begin{aligned} S_{fi} \;&=\; iea\sqrt{\frac{m}{E_iV}}\sqrt{\frac{m}{E_fV}}\Big(\frac{\pi}{k^2}\Big)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{(\vec{p}_i-\vec{p}_f)^2}{4k^2}} \\ &\quad 2\pi\delta(E_i-E_f)\bar{u}(\vec{p}_f,s)\gamma_3(1-\gamma_5)u(\vec{p}_i,r)\;. \end{aligned}$$

Srednja vrednost kvadrata modula amplitude prelaza je

$$\Big\langle|S_{fi}|^2\Big\rangle = \frac{e^2a^2m^2}{V^2E_iE_f}2\pi T\delta(E_i-E_f)\Big(\frac{\pi}{k^2}\Big)^3e^{-\frac{(\vec{p}_i-\vec{p}_f)^2}{2k^2}}\Big\langle|\mathcal{M}|^2\Big\rangle\;,$$

gde je

$$\begin{aligned} \Big\langle|\mathcal{M}|^2\Big\rangle \;&=\; \frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{2}|\bar{u}(\vec{p}_f,s)\gamma_3(1-\gamma_5)u(\vec{p}_i),r)|^2 \\ &=\; \frac{1}{2}\frac{1}{4m^2}\mathrm{tr}\Big[(\not{p}_f+m)\gamma_3(1-\gamma_5)(\not{p}_i+m)(1+\gamma_5)\gamma_3\Big] \\ &=\; \frac{1}{m^2}(2p_f^3p_i^3+p_i\cdot p_f)\;. \end{aligned}$$

Diferencijalni efikasni presek je

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^2a^2\pi}{4k^6}\Big(E_i^2+|\vec{p}_i|^2\cos\theta\Big)e^{-\frac{1}{k^2}|\vec{p}_i|^2(1-\cos\theta)}\;.$$

10.12 Navešćemo samo izraz za amplitudu prelaza i krajnji rezultat za diferencijalni presek:

$$S_{fi} = ie\frac{m}{V\sqrt{E_iE_f}}\bar{v}(\vec{p}_i,s)v(\vec{p}_f,r)\int d^4x(iE_f)\frac{g}{|\vec{x}|}e^{-i(p_i-p_f)x}\;,$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^2g^2E^2(E^2+m^2-\vec{p}^2\cos\theta)}{2|\vec{p}|^4(1-\cos\theta)^2}\;.$$

10.13 Amplituda prelaza, S_{fi} je

$$\begin{aligned} S_{fi} \;&=\; iea\sqrt{\frac{m}{VE_i}}\sqrt{\frac{m}{VE_f}}\bar{u}(\vec{p}_f,s_f)\gamma^0u(\vec{p}_i,s_i)\int d^4x\delta^{(3)}(\vec{x})e^{-i(p_i-p_f)x} \\ &=\; iea\frac{m}{V\sqrt{E_iE_f}}(2\pi)\delta(E_i-E_f)\bar{u}(\vec{p}_f,s_f)\gamma^0u(\vec{p}_i,s_i)\;, \end{aligned}$$

gde su s_i i s_f polarizacije inicijalnog odnosno finalnog elektrona. Da bi našli $|S_{fi}|^2$ potrebno je da nađemo kvadrat modula spinskog dela amplitude. Kako je

$$u(\vec{p},s)\bar{u}(\vec{p},s) = \frac{1+\gamma_5 \not{s}}{2}\frac{\not{p}+m}{2m} \ ,$$

to je

$$\begin{aligned}
&|\bar{u}(\vec{p}_f,s_f)\gamma^0 u(\vec{p}_i,s_i)|^2 \\
= \ & \frac{1}{16m^2}\mathrm{tr}\Big[(1+\gamma_5\not{s}_f)(\not{p}_f+m)\gamma_0(1+\gamma_5\not{s}_i)(\not{p}_i+m)\gamma_0\Big] \\
= \ & \frac{1}{16m^2}\Big(\mathrm{tr}[\not{p}_f\gamma_0\not{p}_i\gamma_0] + m^2\mathrm{tr}[1] \\
- \ & \mathrm{tr}[\not{s}_f\not{p}_f\gamma_0\not{s}_i\not{p}_i\gamma_0] + m^2\mathrm{tr}[\not{s}_f\gamma_0\not{s}_i\gamma_0]\Big) \ ,
\end{aligned} \tag{10.13-1}$$

gde smo zadržali samo nenulte tragove. Komponente impulsa p_i, p_f i vektora polarizacije s_i, s_f su:

$$p_i^\mu = (E_i, 0, 0, |\vec{p}_i|) \ ,$$

$$p_f^\mu = (E_f, |\vec{p}_f|\sin\theta\cos\phi, |\vec{p}_f|\sin\theta\sin\phi, |\vec{p}_f|\cos\theta) \ ,$$

$$s_i^\mu = (|\vec{p}_i|/m, 0, 0, E_i/m),$$

$$s_f^\mu = (|\vec{p}_f|/m, (E_f/m)\sin\theta\cos\phi, (E_f/m)\sin\theta\sin\phi, (E_f/m)\cos\theta) \ .$$

Sabirci u sumi (10.13-1) su:

$$\mathrm{tr}[\not{s}_f\not{p}_f\gamma_0\not{s}_i\not{p}_i\gamma_0] = -4m^2\cos\theta \ ,$$

$$\mathrm{trI} = 4$$

$$\mathrm{tr}[\not{s}_f\gamma_0\not{s}_i\gamma_0] = 4\Big(\frac{k^2}{m^2} + \frac{E^2}{m^2}\cos\theta\Big) \ ,$$

$$\mathrm{tr}[\not{p}_f\gamma_0\not{p}_i\gamma_0] = 4(E^2 + k^2\cos\theta) \ ,$$

gde je $E_i = E_f = E$ dok je $k = |\vec{p}_i| = |\vec{p}_f|$. Sabirajući ove članove dobijamo

$$|\bar{u}(\vec{p}_f,s_f)\gamma^0 u(\vec{p}_i,s_i)|^2 = \frac{E^2}{m^2}\cos^2\frac{\theta}{2} \ . \tag{10.13-2}$$

Diferencijalni presek za rasejanje se dalje nalazi standardno. Rezultat je

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^2a^2}{4\pi^2}E^2\cos^2(\theta/2) \ .$$

10.14 Na osnovu dijagrama sa slike iz zadatka (10.7) (ii) amplituda za ovaj proces je

$$\mathcal{M} = \frac{ie^2}{k^2}\bar{u}(\vec{p}_2, r)\gamma^\mu u_2(\vec{p}_1)\bar{v}_2(\vec{q}_1)\gamma_\mu v(\vec{q}_2, s) \ ,$$

gde indeks 2 na u i v spinorima ukazuje da se radi o česticama negativnog heliciteta. Kvadrat modula Feynman-ove ampitude je

$$\begin{aligned} \left\langle |\mathcal{M}|^2 \right\rangle &= \frac{e^4}{64m_e^2 m_\mu^2 k^4}\mathrm{tr}[(\not{p}_2 + m_e)\gamma^\mu(\not{p}_1 + m_e)(1 - \gamma_5\not{s}_1)\gamma_\nu] \\ &\quad \mathrm{tr}[(\not{q}_1 - m_\mu)(1 - \gamma_5\not{s}_2)\gamma_\mu(\not{q}_2 - m_\mu)\gamma^\nu] \ , \end{aligned}$$

gde smo sumirali po stanjima polarizacije finalnih čestica u procesu. Ovde su s_1 i s_2 vektori polarizacije upadnog elektrona i mi mezona i kasnije ćemo ih odrediti. Primenom odgovarajućih formula iz zadatka 3.6 kao i odgovarajućeg izraza za kontrakciju dva ϵ simbola iz zadatka 1.5 dobijamo

$$\begin{aligned} \left\langle |\mathcal{M}|^2 \right\rangle &= \frac{e^4}{2m_e^2 m_\mu^2 k^4}\Big[(p_2 \cdot q_1)(p_1 \cdot q_2) + (p_2 \cdot q_2)(p_1 \cdot q_1) \\ &- m_\mu^2(p_2 \cdot p_1) - m_e^2(q_1 \cdot q_2) + 2m_e^2 m_\mu^2 \\ &+ m_e m_\mu\Big((s_1 \cdot s_2)(p_2 \cdot q_2) - (s_1 \cdot s_2)(p_2 \cdot q_1) \\ &- (s_1 \cdot s_2)(p_1 \cdot q_2) + (s_1 \cdot s_2)(p_1 \cdot q_1) \\ &- (s_1 \cdot q_2)(s_2 \cdot p_2) + (s_1 \cdot q_1)(s_2 \cdot p_2) \\ &+ (s_1 \cdot q_2)(s_2 \cdot p_1) - (s_1 \cdot q_1)(s_2 \cdot p_1)\Big)\Big] \ . \end{aligned} \qquad (10.14\text{-}1)$$

U sistemu CM četvorovektori impulsa su

$$p_1^\mu = (E, 0, 0, p) \ ,$$

$$q_1^\mu = (E', 0, 0, -p) \ ,$$

$$p_2^\mu = (E, p\sin\theta\cos\phi, p\sin\theta\sin\phi, p\cos\theta) \ ,$$

$$q_2^\mu = (E', -p\sin\theta\cos\phi, -p\sin\theta\sin\phi, -p\cos\theta) \ .$$

Vektori polarizacije s_1 i s_2 su

$$s_1^\mu = (p/m_e, 0, 0, E/m_e) \ ,$$

$$s_2^\mu = (p/m_\mu, 0, 0, -E'/m_\mu) \ .$$

Nalaženjem skalarnih proizvoda između četvorovektora u (10.14-1) i sređivanjem dobijenog izraza dobija se

$$\begin{aligned}\left\langle|\mathcal{M}|^2\right\rangle &= \frac{e^4}{32m_e^2m_\mu^2p^4\sin^4(\theta/2)}\Big[(EE'+p^2)^2+(EE'+p^2\cos\theta)^2\\ &- 2p^2(m_e^2+m_\mu^2)\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\\ &+ p^2(4p^2\sin^2\frac{\theta}{2}+EE'\sin^2\theta)\Big] ,\end{aligned} \tag{10.14-2}$$

odakle je diferencijalni presek

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{e^4}{128\pi^2(E+E')^2p^4\sin^4(\theta/2)}\Big[(EE'+p^2)^2+(EE'+p^2\cos\theta)^2\\ &- 2p^2(m_e^2+m_\mu^2)\sin^2(\frac{\theta}{2})\\ &+ p^2(4p^2\sin^2\frac{\theta}{2}+EE'\sin^2\theta)\Big] .\end{aligned} \tag{10.14-3}$$

10.15 Hamiltonijan interakcije je

$$H_{\rm int} = g\int d^3x\bar\psi\gamma_5\psi\phi ,$$

gde su operatori polja u interakcionoj slici. U najnižem redu ("tree-level") amplituda prelaza je

$$S_{fi} = \frac{1}{2}(-ig)^2\left\langle\vec p'\vec k'\right|\int d^4xd^4yT\{:(\bar\psi\gamma_5\psi\phi)_x::(\bar\psi\gamma_5\psi\phi)_y:\}\left|\vec p\vec k\right\rangle . \tag{10.15-1}$$

Kako je

$$\psi(x)\left|\vec p,r\right\rangle = \sqrt{\frac{m}{VE_p}}u(\vec p,r)e^{-ipx} ,$$

$$\left\langle\vec p,r\right|\bar\psi(x) = \sqrt{\frac{m}{VE_p}}\bar u(\vec p,r)e^{ipx} ,$$

to iz izraza (10.15-1) vidimo da postoje četiri načina na koje možemo da izvršimo kontrakcije a koje odgovaraju traženom procesu. Tako dobijamo (napomenimo da postoje dva para po dva ista sabirka)

$$\begin{aligned}S_{fi} &= -g^2\frac{m^2}{V^2\sqrt{E_1E_2E_1'E_2'}}\int d^4xd^4yi\Delta_F(x-y)\\ &\Big[\bar u(\vec k',s')\gamma_5u(\vec k,s)\bar u(\vec p',r')\gamma_5u(\vec p,r)e^{i(p'-p)y+i(k'-k)x}\\ &- \bar u(\vec p',r')\gamma_5u(\vec k,s)\bar u(\vec k',s')\gamma_5u(\vec p,r)e^{i(k'-p)y+i(p'-k)x}\Big] .\end{aligned} \tag{10.15-2}$$

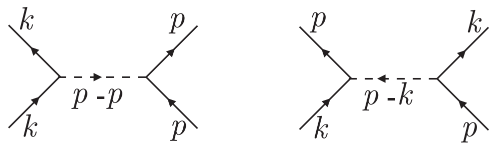
Relativan minus znak je posledica Wick-ove teoreme za fermione. Integracijom prethodnog izraza uz

$$i\Delta_F(x-y) = i\int d^4q \frac{e^{-iq(x-y)}}{q^2 - M^2 + i\epsilon} ,$$

dobija se

$$\begin{aligned}
S_{fi} &= -i\frac{(2\pi)^4 g^2 m^2}{V^2\sqrt{E_1E_2E_1'E_2'}}\delta^{(4)}(p'+k'-p-k) \\
&\Big[\frac{1}{(p'-p)^2 - M^2 + i\epsilon}\bar{u}(\vec{k}',s')\gamma_5 u(\vec{k},s)\bar{u}(\vec{p}',r')\gamma_5 u(\vec{p},r) \\
&- \frac{1}{(p'-k)^2 - M^2 + i\epsilon}\bar{u}(\vec{p}',r')\gamma_5 u(\vec{k},s)\bar{u}(\vec{k}',s')\gamma_5 u(\vec{p},r)\Big] .
\end{aligned}$$

Feynman-ovim dijagrami za rasejanje prikazani su na slici.



Kvadrat modula amplitude je

$$\begin{aligned}
\Big\langle |S_{fi}|^2 \Big\rangle &= \frac{g^4(2\pi)^4 T\delta^{(4)}(p'+k'-p-k)}{4V^3E_1E_2E_1'E_2'} \\
&\Big[\frac{(k\cdot k')(p\cdot p') - (k\cdot k')m^2 - (p\cdot p')m^2 + m^4}{((p'-p)^2 - M^2)^2} \\
&+ \frac{(p\cdot k')(k\cdot p') - (p\cdot k')m^2 - (k\cdot p')m^2 + m^4}{((p'-k)^2 - M^2)^2} \\
&- \frac{1}{2}\frac{1}{(p'-p)^2 - M^2}\frac{1}{(p'-k)^2 - M^2}\mathrm{Re}\Big[(\mathrm{k}\cdot\mathrm{k}')(\mathrm{p}\cdot\mathrm{p}') \\
&-(p'\cdot k')(k\cdot p) + (p\cdot k')(k\cdot p') \\
&- (k\cdot k')m^2 - (p\cdot p')m^2 - (k\cdot p')m^2 \\
&- (p\cdot k')m^2 + (k\cdot p)m^2 + (k'\cdot p')m^2 + m^4\Big]\Big] .
\end{aligned}$$

Kvadrat amplitude prelaza po jedinici vremena u sistemu CM je

$$\frac{\langle |S_{fi}|^2\rangle}{T} = \frac{g^4(2\pi)^4\delta^{(4)}(p'+k'-p-k)}{4V^3E^2}|\vec{p}|^4$$

$$
\begin{aligned}
&\Big[\frac{(1-\cos\theta)^2}{(2|\vec{p}|^2(\cos\theta-1)-M^2)^2} \\
&+ \frac{(1+\cos\theta)^2}{(2|\vec{p}|^2(\cos\theta+1)+M^2)^2} \\
&- \frac{\sin^2\theta}{(2|\vec{p}|^2(\cos\theta-1)-M^2)(2|\vec{p}|^2(\cos\theta+1)+M^2)}
\end{aligned}
\tag{10.15-3}
$$

gde je $E_1 = E_2 = E_1' = E_2' = E$ enrergija upadnih odnosno finalnih čestica. Sva četiri fermiona imaju isti intenzitet impulsa koji smo obeležili sa $|\vec{p}|$. U ultrarelativističkom limesu iz (10.15-3) dobijamo

$$
\frac{\langle |S_{fi}|^2\rangle}{T} = \frac{3g^4(2\pi)^4\delta^{(4)}(p'+k'-p-k)}{16V^3E^2} \ . \tag{10.15-4}
$$

Totalni presek za rasejanje je

$$
\begin{aligned}
\sigma &= \int\int \frac{\langle |S_{fi}|^2\rangle}{T}\frac{VE}{2|\vec{p}_1|}\frac{Vd^3p_1'}{(2\pi)^3}\frac{Vd^3p_2'}{(2\pi)^3} \\
&= \frac{3g^4}{4\pi^2}\frac{\delta(2E-2E')}{16E}\frac{dE_1'd\Omega_1'}{2E_1} \\
&= \frac{3g^4}{64\pi E^2} \ .
\end{aligned}
$$

10.16 Direktnom primenom Feynman-ovih pravila dobijamo izraz za odgovarajuću amplitudu. U narednim izrazima izostavili smo pisanje spoljnjih linija.

(i)

$$
\mathcal{M} = (ie)^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\Big(\gamma_\nu\frac{1}{\not p-\not k-m+i\epsilon}\gamma_\mu\frac{g^{\mu\nu}}{k^2+i\epsilon}\Big)
$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M} &= i(ie)^4\int\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\Big(\gamma^\mu\frac{1}{\not p-\not k-m+i\epsilon}\gamma^\sigma \\
&\quad \frac{1}{\not p-\not k-\not q-m+i\epsilon}\gamma_\sigma\frac{1}{\not p-\not k-m+i\epsilon} \\
&\quad \gamma_\mu\frac{1}{k^2+i\epsilon}\frac{1}{q^2+i\epsilon}\Big)
\end{aligned}
$$

(iii)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M} &= -(ie)^3 i^3\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{tr}\Big[\gamma^\nu\frac{1}{\not p-\not q-m+i\epsilon}\gamma^\rho \\
&\quad \frac{1}{\not p+\not k-m+i\epsilon}\gamma^\mu\frac{1}{\not p-m+i\epsilon}\Big]
\end{aligned}
$$

(iv)

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= i(ie)^3 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\Big(\gamma^\nu \frac{1}{\not p + \not k - \not q - m + i\epsilon} \\ &\quad \gamma^\rho \frac{1}{\not p - \not q - m + i\epsilon}\gamma_\nu \frac{1}{q^2 + i\epsilon}\Big)\end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned}\mathcal{M} = (ie)^7 i^6 (-i)^3 &\int\int\int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{d^4k}{(2\pi)^4} \\ &\Bigg\{\gamma^\nu \frac{1}{\not p_1 + \not q - m + i\epsilon}\gamma^\alpha \frac{1}{\not q - m + i\epsilon}\gamma^\mu \\ &\frac{g^{\mu\rho}}{(p-q)^2 + i\epsilon}\frac{g^{\sigma\nu}}{(p-q)^2 + i\epsilon} \\ &\mathrm{tr}\left[\frac{1}{\not k - m + i\epsilon}\gamma^\sigma \frac{1}{\not p - \not q + \not k - m + i\epsilon}\gamma^\rho\right] \\ &\frac{g^{\alpha\beta}}{p_1^2 + i\epsilon}\mathrm{tr}\left[\frac{1}{\not p_1 + \not k_1 - m + i\epsilon}\gamma^\delta \frac{1}{\not k_1 - m + i\epsilon}\gamma^\beta\right]\Bigg\}\end{aligned}$$

(vi)

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = (ie)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{tr}\Big[\frac{1}{\not p - \not k - m + i\epsilon}\gamma^\nu \frac{1}{\not p - m + i\epsilon}\gamma^\mu\Big]$$

(vii)

$$\mathcal{M} = \Pi^{\mu\nu}(k)\frac{-ig_{\nu\rho}}{k^2 + i\epsilon}\Pi^{\rho\sigma}(k)$$

(viii)

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= -i^4(-i)(ie)^4 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\mathrm{tr}\Big[\frac{1}{\not p - \not k - m + i\epsilon}\gamma^\sigma \\ &\quad \frac{1}{\not p + \not q - \not k - m + i\epsilon}\gamma^\nu \frac{1}{\not p + \not q - m + i\epsilon}\gamma^\rho \\ &\quad \frac{1}{\not p - m + i\epsilon}\gamma^\mu\Big]\frac{g_{\rho\sigma}}{q^2 + i\epsilon}\end{aligned}$$

(ix)

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= -(ie)^4 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{tr}\Big[\frac{1}{\not p - \not k_1 - m + i\epsilon}\gamma^\mu \frac{1}{\not p - \not k_1 - \not k_2 - m + i\epsilon} \\ &\quad \gamma^\sigma \frac{1}{\not p - \not q_1 - m + i\epsilon}\gamma^\rho \frac{1}{\not p - m + i\epsilon}\gamma^\nu\Big]\end{aligned}$$

Rešenja 11

Renormalizacija i regularizacija

11.1 Primenićemo metod matematičke indukcije. Za $n = 2$ imamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{A_1A_2} &= \int_0^1 dx_1dx_2\delta(x_1+x_2-1)\frac{1}{[x_1A_1+x_2A_2]^2}\\ &= \int_0^1 dx_1\frac{1}{[x_1A_1+(1-x_1)A_2]^2}\\ &= \frac{1}{A_1A_2}\ .\end{aligned} \tag{11.1-1}$$

Diferenciranjem (11.1-1) dobijamo

$$\frac{1}{AB^n} = \int_0^1 dxdy\delta(x+y-1)\frac{ny^{n-1}}{[xA+yB]^{n+1}}\ . \tag{11.1-2}$$

Pretpostavimo da je traženi identitet tačan za $n = k$. Pokažimo da je tačan za $n = k + 1$. Primenom pretpostavke i (11.1-2) dobijamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{A_1...A_nA_{n+1}} &= \int_0^1 dz_1...dz_n\delta(z_1+...+z_n-1)\frac{(n-1)!}{[z_1A_1+...+z_nA_n]^nA_{n+1}}\\ &= \int_0^1 dz_1...dz_n\, n!\,\delta(z_1+...+z_n-1)\\ &\quad \frac{y^{n-1}}{[yz_1A_1+...+yz_nA_n+(1-y)A_{n+1}]^{n+1}}\ .\end{aligned} \tag{11.1-3}$$

Ako dalje uvedemo smenu $x_1 = yz_1, ..., x_n = yz_n, x_{n+1} = 1 - y$ uz osobinu

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)\ ,$$

dobijamo

$$\frac{1}{A_1...A_nA_{n+1}} = \int dx_1...dx_ndx_{n+1}\ \delta(x_1+...+x_n+x_{n+1}-1) \times \frac{n!}{[x_1A_1+...+x_{n+1}A_{n+1}]^{n+1}}\ , \tag{11.1-4}$$

čime je dokaz završen.

11.2 Smenom $q = k + p$ traženi integral postaje

$$I = \int d^Dq \quad \frac{1}{(q^2-m^2-p^2+i\epsilon)^n}\ . \tag{11.2-1}$$

Prelaskom na euklidski prostor $q^0 = iq_E^0,\ \vec{q} = \vec{q}_E$ dobijamo

$$I = i\int d^Dq_E \quad \frac{1}{(-q_E^2-m^2-p^2+i\epsilon)^n}\ . \tag{11.2-2}$$

Integracija po $-\infty < q_0 < \infty$ prelazi u integraciju po imaginarnoj osi, $-\infty < q_E^0 < \infty$, na osnovu Cauchy-jeve teoreme. Prelazak sa Minkowski-jevog na euklidski prostor je tzv. Wick-ova rotacija. Veza između dekartovih i sfernih koordinata u D dimenzionom prostoru je

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\sin\theta_{D-2}\sin\theta_{D-3}...\sin\theta_1\sin\phi\ ,\\
x_2 &= r\sin\theta_{D-2}\sin\theta_{D-3}...\sin\theta_1\cos\phi\ ,\\
x_3 &= r\sin\theta_{D-2}\sin\theta_{D-3}...\sin\theta_2\cos\theta_1\ ,\\
&\vdots\\
x_D &= r\cos\theta_{D-2}\ ,
\end{aligned}$$

gde je $0 < \phi < 2\pi,\ 0 < \theta_1, ..., \theta_{D-2} < \pi$. Element zapremine, dV_D je

$$dV_D = r^{D-1}dr\,d\phi\prod_1^{D-2}\sin^m\theta_m d\theta_m\ .$$

Na osnovu toga je

$$I = \frac{i}{(-1)^n}2\pi\prod_{m=1}^{D-2}\int_0^\pi d\theta_m\ \sin^m\theta_m\int_0^\infty dr\frac{r^{D-1}}{(r^2+m^2+p^2)^n}\ . \tag{11.2-3}$$

Ako dalje iskoristimo

$$\int_0^\pi d\theta\ \sin^m\theta = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)}\ ,$$

i

$$\int_0^\infty dx \frac{x^b}{(x^2+M)^a} = \frac{\Gamma\Big(\frac{1+b}{2}\Big)\Gamma\Big(a-\frac{1+b}{2}\Big)}{2M^{a-(1+b)/2}\Gamma(a)} ,$$

dobijamo

$$I = i(-1)^n \pi^{\frac{D}{2}} \frac{\Gamma\Big(n-\frac{D}{2}\Big)}{\Gamma(n)} \frac{1}{(m^2+p^2)^{n-\frac{D}{2}}} .$$

11.3 Feynman-ovom parametrizacijom (11.G) zadati integral postaje

$$I = \int_0^1 dx \int d^4k \quad \frac{1}{[(k+px)^2-\Delta]^2} ,$$

gde je $\Delta = p^2(x^2-x)+m^2x$. Uvodeći smenu $l = k+px$ i prelazeći na euklidski prostor ($l^0 = il_E^0$, $\vec{l} = \vec{l}_E$) imamo

$$I = i\int_0^1 dx \int d^4l_E \frac{1}{[l_E^2+\Delta]^2} .$$

Uvodeći sferne koordinate u četvorodimenzionom euklidskom prostoru i integraleći po uglovnim varijablama dobijamo

$$I = i\pi^2 \int_0^1 dx \int_0^\infty dl_E^2 l_E^2 \frac{1}{(l_E^2+\Delta)^2} = i\pi^2 \int_0^1 dx \Big[\ln(l_E^2+\Delta)|_0^\infty - 1\Big] .$$

Prethodni integral je očigledno logaritamski divergentan. U okviru Pauli-Villars-ove regularizacije propagator $1/k^2$ u integralu I zamenićemo sa

$$\frac{1}{k^2} \to \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2-\Lambda^2} ,$$

gde parametar Λ teži beskonačnosti. Doprinos drugog člana pri integraciji je

$$I_\Lambda = i\pi^2 \int_0^1 dx \Big[\ln(l_E^2+\Delta_\Lambda)|_0^\infty - 1\Big] ,$$

gde je $\Delta_\Lambda = \Lambda^2 + p^2(x^2-x) + x(m^2-\Lambda^2)$. Oduzimajući ova dva rezultata dobijamo

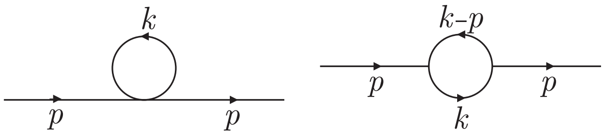
$$I - I_\Lambda = i\pi^2 \int_0^1 dx \ln\Big(\frac{\Lambda^2+p^2(x^2-x)+x(m^2-\Lambda^2)}{p^2(x^2-x)+m^2x}\Big) ,$$

koji je konačan za veliko Λ.

11.4 U $D = 4-\epsilon$ dimenzionom prostoru dimenzija skalarnog polja je $D/2-1$ dok su dimenzije konstanti interakcije iste kao u četvorodimenzionom prostoru: $[\lambda] = 0,\ [g] = 1$. Dimenzija lagranžijana je $[\mathcal{L}] = D$, pa je njegov oblik

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{g\mu^{\frac{\epsilon}{2}}}{3!}\phi^3 - \frac{\lambda\mu^\epsilon}{4!}\phi^4 \ ,$$

gde je μ parametar koji ima dimenzije mase. Sopstvena energija u najnižem redu određena je sa dijagramima prikazanim na slici.



Prvi od njih je

$$-i\Sigma_1 = -\frac{i\lambda}{2}\mu^\epsilon\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\frac{i}{k^2-m^2} \ ,$$

Primenom (11.A) dobijamo

$$-i\Sigma_1 = -\frac{i\lambda m^2}{32\pi^2}\Big(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\Big)^{\frac{\epsilon}{2}}\Gamma\Big(-1+\frac{\epsilon}{2}\Big) \ ,$$

što uz (11.F) daje

$$\begin{aligned}-i\Sigma_1 &= \frac{i\lambda m^2}{32\pi^2}\Big(1+\frac{\epsilon}{2}\ln\Big(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\Big)+o(\epsilon)\Big)\Big(\frac{2}{\epsilon}+1-\gamma+o(\epsilon)\Big)\\ &= \frac{i\lambda m^2}{32\pi^2}\Big(\frac{2}{\epsilon}+1-\gamma+\ln\Big(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\Big)+o(\epsilon)\Big) \ .\end{aligned}$$

Drugi integral je

$$-i\Sigma_2(p) = \frac{(-ig)^2}{2}\mu^\epsilon\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\frac{i}{k^2-m^2}\frac{i}{(k-p)^2-m^2} \ .$$

Uvodeći Feynman-ovu parametrizaciju (11.G) poslednji izraz postaje

$$-i\Sigma_2(p) = -\frac{(-ig)^2}{2}\mu^\epsilon\int_0^1 dx\ \int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\ \frac{1}{[k^2-2k\cdot px+p^2x-m^2]} \ .$$

Integracija po impulsu k daje

$$
\begin{aligned}
-i\Sigma_2(p) &= \frac{i}{2}\mu^\epsilon g^2 \frac{1}{(4\pi)^{2-\epsilon/2}}\Gamma\Big(\frac{\epsilon}{2}\Big)\int_0^1 dx\ (m^2-p^2x+p^2x^2)^{-\frac{\epsilon}{2}} \\
&= \frac{ig^2\mu^\epsilon}{2(4\pi)^2}\Big(\frac{2}{\epsilon}-\gamma+o(\epsilon)\Big) \\
&\quad \Big[1-\frac{\epsilon}{2}\int_0^1 dx\ \Big(\ln m^2+\ln(1+\frac{p^2}{m^2}x(x-1))\Big)\Big]\ .
\end{aligned}
$$

Integracijom po Feynman-ovom parametru x dobijamo (za $p^2 < 4m^2$)

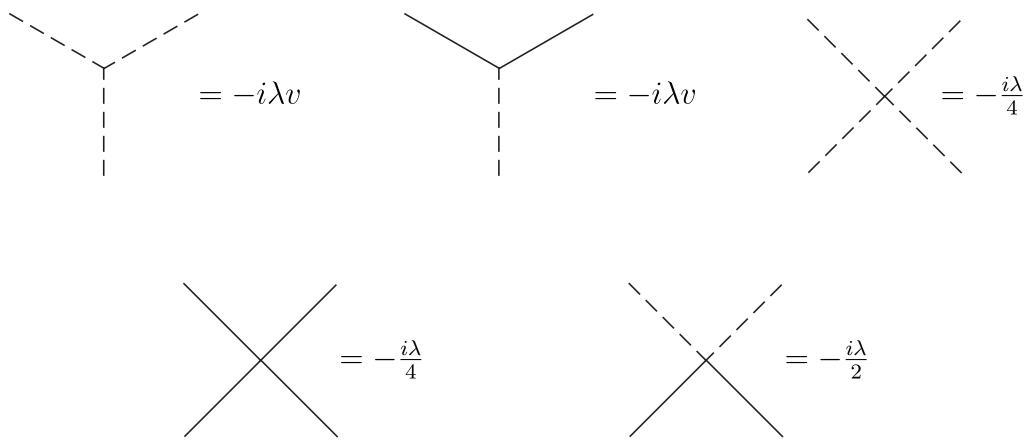
$$
-i\Sigma_2(p) = \frac{ig^2}{32\pi^2}\Big[\frac{2}{\epsilon}-\gamma+2+\ln\frac{4\pi\mu^2}{m^2}-2\sqrt{\frac{4m^2}{p^2}-1}\,\mathrm{arcsin}\sqrt{\frac{p^2}{4m^2}}\Big]\ .
$$

Sopstvena energija skalarne čestice je

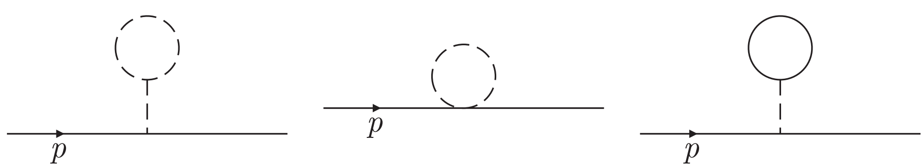
$$
-i\Sigma = -i\Sigma_1 - i\Sigma_2\ .
$$

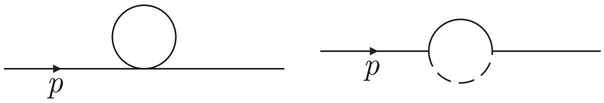
Renormalizovana masa je $m_R^2 = m^2 + \Sigma(m)$.

11.5 Verteksi u ovoj teoriji su prikazani na slici.



Sopstvena energija π čestice određena je sa sledećim dijagramima. Puna linija se odnosi na π polje a isprekidana na σ.





Prvi od dijagrama je

$$-i\Sigma_1(p^2) = 6(-iv\lambda)^2 \frac{i}{-m^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{i}{k^2 - m^2} \ .$$

Faktor simetrije ovog dijagrama je 6, jer je jedno spoljnje π polje moguće kontrakovati sa π poljem iz $\pi\pi\sigma$ verteksa na dva načina, dok je $\sigma\sigma$ kontrakciju u verteksu $\sigma\sigma\sigma$ moguće je izvršiti na 3 načina. Preostali dijagrami na slici su:

$$-i\Sigma_2(p^2) = \lambda \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 - m^2} \ ,$$

$$-i\Sigma_3(p^2) = -\frac{2v^2\lambda^2}{m^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2} \ ,$$

$$-i\Sigma_4(p^2) = 3\lambda \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2} \ ,$$

$$-i\Sigma_5(p^2) = 4\lambda^2 v^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{(k+p)^2} \ .$$

Primetimo da zapravo jedino poslednji integral zavisi od impulsa p. Renormalizovana masa određena je sa $\Sigma(0) = m_R^2$. Lako se vidi da je

$$\begin{aligned} -i\Sigma_5(0) &= 4\lambda^2 v^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{k^2} \\ &= \frac{4\lambda^2 v^2}{m^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \Big(\frac{1}{k^2 - m^2} - \frac{1}{k^2} \Big) \ . \end{aligned}$$

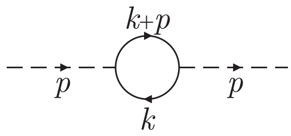
Sabirajući ove dijagrame dobijamo

$$\Sigma(0) = \Sigma_1(0) + \Sigma_2(0) + \Sigma_3(0) + \Sigma_4(0) + \Sigma_5(0) = 0 \ ,$$

pa je $m_R = 0$.

11.6 Iz dimenzionih razloga je jasno da interakcioni lagranžijan u D dimenzionom prostoru ima oblik $-g\mu^{\epsilon/2}\chi\phi^2$.

(i) Sopstvena energija χ čestice određena je dijagramom



sa koga vidimo da je

$$-i\Pi(p^2) = 2g^2\mu^\epsilon \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 - m^2 + i0} \frac{1}{(k+p)^2 - m^2 + i0} \ . \qquad (11.6\text{-}1)$$

Uvodeći Feynman-ovu parametrizaciju (11.G) i integracijom po impulsu k dobijamo

$$\begin{aligned} - \quad i\Pi(p^2) &= \frac{ig^2}{8\pi^2}\Big(\frac{2}{\epsilon} - \gamma - \int_0^1 dx \ln \frac{m^2 + p^2x(x-1) + i0}{4\pi\mu^2}\Big) \\ = \quad & \frac{ig^2}{8\pi^2}\Big[\frac{2}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m^2}{4\pi\mu^2} - \int_0^1 dx \ln\Big(1 + \frac{p^2}{m^2}x(x-1)\Big)\Big] (11.6\text{-}2) \end{aligned}$$

Kao što je poznato iz kompleksne analize logaritamska funkcija, $\ln z$ ima zasek duž pozitivnog dela x ose koji počinje u tački grananja $z = 0$. Zasek je neophodan da bi pojedine grane logaritamske funkcije bile regularne i uniformne funkcije. Odredimo tačku grananja za funkciju $\ln[1 + \frac{p^2}{m^2}x(x-1)]$. To je najmanja vrednost $\frac{p^2}{m^2}$ za koju je argument logaritamske funkcije nula, tj $f \equiv 1 + \frac{p^2}{m^2}x(x-1) = 0$ i on je određen uslovom

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{p^2}{m^2}(2x-1) = 0 \ ,$$

odakle je $x = \frac{1}{2}$. Tačka $p^2 = 4m^2$, koja je energija praga raspada $\chi \to 2\phi$, je tačka grananja. Zasek počine u toj tački i ide duž x-ose do beskonačnosti. Za $0 < p^2 < 4m^2$, primenom

$$\int_0^1 dx \ln[1 + a^2x(x-1)] = -2 + \frac{2}{a}\sqrt{4-a^2} \arcsin\frac{a}{2}; \quad (a^2 < 4) \ ,$$

(11.6-2) postaje

$$\begin{aligned} -i\Pi(p^2) \quad &= \quad \frac{ig^2}{8\pi^2}\Bigg[\frac{2}{\epsilon} - \gamma + 2 - \ln\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \\ &- \quad 2\left(\frac{4m^2}{p^2} - 1\right)^{1/2} \arcsin\frac{\sqrt{p^2}}{2m}\Bigg] \ . \end{aligned}$$

Gornji izraz možemo analitički produžiti u kompleksnoj p^2 ravni vodeći računa o postojanju zaseka.

(ii) Amplituda prelaza u najnižem redu teorije perturbacije je

$$\begin{aligned} S_{fi} &= -ig \int d^4x \, \langle p_1, \vec{p}_2 | \, \chi(x)\phi(x)\phi(x) \left| \vec{M}, \vec{p} = 0 \right\rangle \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p_1 - p_2) \sqrt{\frac{1}{2VM}} \sqrt{\frac{1}{2VE_1}} \sqrt{\frac{1}{2VE_2}} (-2ig) \ , \end{aligned}$$

gde su $\vec{p}_{1,2}$ impulsi produkata raspada. Takođe uzeli smo da je χ čestica u miru. Širina raspada određena je sa

$$\Gamma = \frac{|S_{fi}|^2}{T} \frac{V^2 d^3p_1 d^3p_2}{(2\pi)^6} \ .$$

Integracijom po impulsu $\vec{p}_2$ dobijamo

$$\Gamma = \frac{4g^2}{(2\pi)^2} \int dEpE \frac{1}{8ME^2} \delta(M - 2E) \int d\Omega \ ,$$

Integracija po prostornom uglu daje 2π (ne 4π jer su finalne čestice nerazličive). Konačni rezultat je

$$\Gamma = \frac{g^2}{4\pi M^2} \sqrt{\frac{M^2}{4} - m^2} \ .$$

(iii) Za $p^2 > 4m^2$ argument pod logaritmom u (11.6-2) postaje negativan (ne računajući mali dodatak $i0$). Sa druge strane lako se vidi da je

$$\mathrm{Im} \log[-X - i0] = -\pi \quad (X > 0) \ ,$$

pa je

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\Pi(p^2) &= \frac{g^2}{8\pi^2} \int_0^1 dx \ \mathrm{Im} \ln \left[1 + \frac{p^2}{m^2}(x^2 - x) - i0 \right] \\ &= -\frac{g^2}{8\pi} \int_{x_1}^{x_2} dx \ , \end{aligned}$$

gde su

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}}}{2} \ ,$$

nule argumenta logaritamske funkcije. Lako se vidi da je

$$\mathrm{Im}\Pi(p^2) = -\frac{g^2}{8\pi} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}} \ . \qquad (11.6\text{-}3)$$

Imaginarni deo izraza $\Pi(p^2)$ možemo naći primenom pravila presecanja. Izraz (11.6-1) prepisaćemo u obliku

$$-i\Pi(p^2) = 2g^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(-k)^2 - m^2 + i0} \frac{1}{(k+p)^2 - m^2 + i0} \ . \qquad (11.6\text{-}4)$$

Diskontinuitet amplitude $\mathrm{Disc}\Pi(p^2) = \Pi(p^2 + i\epsilon) - \Pi(p^2 - i\epsilon)$ dobija se zamenom propagatora

$$\frac{1}{p^2 - m^2} \to (-2i\pi)\delta^{(4)}(p^2 - m^2)\theta(p^0) \ ,$$

u izrazu (11.6-4). Zbog invarijantnosti izraza $\Pi(p^2)$ uzaćemo $p^\mu = (p_0, \vec{p} = 0)$. Tako dobijamo

$$\begin{aligned}
\mathrm{Disc}\Pi(p^2) &= 2ig^2(-2i\pi)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \delta^{(4)}(k^2 - m^2) \\
&\quad \delta^{(4)}((k+p)^2 - m^2)\theta(-k_0)\theta(k_0 + p_0) \\
&= -\frac{g^2 i}{8\pi^2} \int d^4k \frac{1}{\omega_k(\omega_k - p_0)} \delta(k_0 + \omega_k)\delta(k_0 + p_0 - \omega_k) \\
&= -\frac{g^2 i}{8\pi^2} \int d^3k \frac{\delta(p_0 - 2\omega_k)}{\omega_k(\omega_k - p_0)} \ . \qquad (11.6\text{-}5)
\end{aligned}$$

Integracijom po $\vec{k}$ dobija se

$$\mathrm{Disc}\Pi(p^2) = \frac{ig^2}{4\pi}\sqrt{1 - \frac{4m^2}{p_0^2}} \ .$$

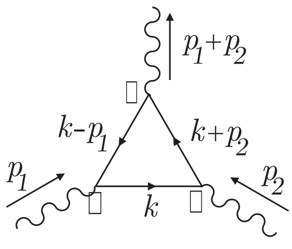
Kako je

$$\mathrm{Im}\Pi(\mathrm{p}^2) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{Disc}\Pi(\mathrm{p}^2)$$

to ponovo dobijamo (11.6-3).

Na osnovu izraza za Γ i $\Pi(M^2)$ odmah se vidi da je relacija iz postavke zadatka zadovoljena. Ona je posledica optičke teoreme.

11.7 Amplituda za ovaj dijagram je



$$\mathcal{M} = -e^3 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\mathrm{tr}[\gamma^\mu(\not k - \not p_1 + m)\gamma^\nu(\not k + \not p_2 + m)\gamma^\rho(\not k + m)]}{((k-p_1)^2 - m^2)((k+p_2)^2 - m^2)(k^2 - m^2)} \ . \qquad (11.7\text{-}1)$$

Feynman-ovom parametrizacijom (11.H) imamo

$$\begin{aligned} & \frac{1}{((k-p_1)^2 - m^2)((k+p_2)^2 - m^2)(k^2 - m^2)} \\ = \ & 2\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz \frac{1}{[k^2 - m^2 + (p_2^2 + 2k\cdot p_2)x + (p_1^2 - 2k\cdot p_1)z]^3} \\ = \ & 2\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz \frac{1}{[(k + p_2 x - p_1 z)^2 - \Delta]^3} \ , \end{aligned}$$

gde je

$$\Delta = (p_2 x - p_1 z)^2 - p_2^2 x - p_1^2 z + m^2 \ .$$

Brojilac podintegralne funkcije u (11.7-1) je

$$\begin{aligned} & \mathrm{tr}[\gamma^\mu(\not k - \not p_1 + m)\gamma^\nu(\not k + \not p_2 + m)\gamma^\rho(\not k + m)] \\ & = \mathrm{tr}[\gamma^\mu(\not l + \not A + m)\gamma^\nu(\not l + \not B + m)\gamma^\rho(\not l + \not C + m)] \ , \qquad (11.7\text{-}2) \end{aligned}$$

gde je

$$\begin{aligned} l &= k + p_2 x - p_1 z \ , \\ A &= p_1 z - p_2 x - p_1 \ , \\ B &= p_1 z - p_2 x + p_2 \ , \\ C &= p_1 z - p_2 x \ . \end{aligned}$$

Pošto je trag neparnog broja gama matrica jednak nuli to (11.7-2) postaje

$$\begin{aligned} & \mathrm{tr}[\gamma^\mu(\not l + \not A + m)\gamma^\nu(\not l + \not B + m)\gamma^\rho(\not l + \not C + m)] \\ = \ & \mathrm{tr}[\gamma^\mu \not l \gamma^\nu \not l \gamma^\rho \not l] + \mathrm{tr}[\gamma^\mu \not l \gamma^\nu \not l \gamma^\rho \not C] + \mathrm{tr}[\gamma^\mu \not l \gamma^\nu \not B \gamma^\rho \not l] \\ + \ & \mathrm{tr}[\gamma^\mu \not l \gamma^\nu \not B \gamma^\rho \not C] + \mathrm{tr}[\gamma^\mu \not A \gamma^\nu \not l \gamma^\rho \not l] + \mathrm{tr}[\gamma^\mu \not A \gamma^\nu \not l \gamma^\rho \not C] \\ + \ & \mathrm{tr}[\gamma^\mu \not A \gamma^\nu \not B \gamma^\rho \not l] + \mathrm{tr}[\gamma^\mu \not A \gamma^\nu \not B \gamma^\rho \not C] + m^2 \mathrm{tr}[\gamma^\mu \not l \gamma^\nu \gamma^\rho] \\ + \ & m^2 \mathrm{tr}[\gamma^\mu \not A \gamma^\nu \gamma^\rho] + m^2 \mathrm{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \not l \gamma^\rho] \\ + \ & m^2 \mathrm{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \not B \gamma^\rho] + m^2 \mathrm{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \not l] + m^2 \mathrm{tr}[\not C \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho] \ . \qquad (11.7\text{-}3) \end{aligned}$$

U integralu (11.7-1) napravićemo smenu varijabli $k \to l$. Članovi u (11.7-3) koji sadrže neparan broj impulsa l daće nulu nakon integracije. Takođe članovi proporcionalni sa m^2 kao i član proporcionalan sa $\mathrm{tr}[\gamma^\mu \not A \gamma^\nu \not B \gamma^\rho \not C]$ su konačni pa jedini divergentni doprinos potiče od preostala tri integrala. Prvi od njih je

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 = \ & - \ 8e^3 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \Big[\frac{2l^\nu(l^\mu C^\rho - g^{\mu\rho} C\cdot l + l^\rho C^\mu)}{(l^2 - \Delta)^3} \\ & - \ \frac{l^2(g^{\mu\nu}C^\rho - g^{\mu\rho}C^\nu + g^{\nu\rho}C^\mu)}{(l^2 - \Delta)^3} \Big] \ , \end{aligned}$$

jer je

$$\mathrm{tr}[\gamma^\mu \not{l}\gamma^\nu \not{l}\gamma^\rho \not{C}] = 2l^\nu \mathrm{tr}[\gamma^\mu \not{l}\gamma^\rho \not{C}] - l^2 \mathrm{tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \not{C}] \ .$$

Integracijom po impulsu l (11.C) dobijamo

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1 \ &= \ -\frac{4ie^3}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}}\Gamma\Big(\frac{\epsilon}{2}\Big)\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz \Big[1 - \frac{\epsilon}{2}\ln\Delta + o(\epsilon^2)\Big] \\ & \qquad (1-\frac{D}{2})(g^{\mu\nu}C^\rho - g^{\mu\rho}C^\nu + g^{\nu\rho}C^\mu) \ .\end{aligned}$$

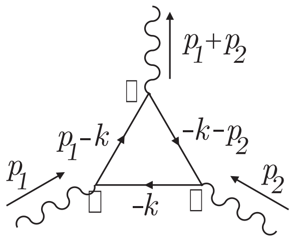
Divergentni deo ovog integrala je

$$\mathcal{M}_1|_{\mathrm{div}} = \frac{ie^3}{2\pi^2\epsilon}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz (g^{\mu\nu}C^\rho - g^{\mu\rho}C^\nu + g^{\nu\rho}C^\mu) \ .$$

Preostala dva integrala računaju se analogno. Rezultat je

$$\begin{aligned}\mathcal{M}|_{\mathrm{div}} \ &= \ \frac{ie^3}{2\pi^2\epsilon}\Big[\frac{1}{6}\Big(g^{\mu\nu}(p_1-p_2)^\rho + g^{\mu\rho}(p_1-p_2)^\nu + g^{\rho\nu}(p_1-p_2)^\mu\Big) \\ & + \ \frac{1}{2}\Big(g^{\mu\nu}(p_1+p_2)^\rho + g^{\mu\rho}(p_2-p_1)^\nu - g^{\rho\nu}(p_1-p_2)^\mu\Big)\Big] \ .\end{aligned}$$

Dijagram kod koga se petlja obilazi u suprotnu stranu prikazan je na slici.



Amplituda je ista kao i u (11.7-1) s tim što je trag u (11.7-1) zamenjen sa tragom

$$\mathrm{tr}[\gamma^\rho(-\not{k} - \not{p}_2 + m)\gamma^\nu(\not{p}_1 - \not{k} + m)\gamma^\mu(-\not{k} + m)] \ .$$

Ubacujući $C^{-1}C$ u prethodni izraz, gde je matrica C matrica konjugacije naboja (4.K), dobijamo

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}[C\gamma^\rho C^{-1}C(-\not{k} - \not{p}_2 + m)C^{-1}C\gamma^\nu C^{-1}C \\ &(\not{p}_1 - \not{k} + m)C^{-1}C\gamma^\mu C^{-1}C(-\not{k} + m)C^{-1}].\end{aligned}$$

Koristeći (4.K) lako se nalazi da je

$$\begin{aligned}& \mathrm{tr}[\gamma^\rho(-\not{k} - \not{p}_2 + m)\gamma^\nu(\not{p}_1 - \not{k} + m)\gamma^\mu(-\not{k} + m)] \\ = \ & (-)^3\mathrm{tr}[\gamma^\rho(\not{k} + m)\gamma^\mu(\not{k} - \not{p}_1 + m)\gamma^\nu(\not{k} + \not{p}_2 + m)] \ ,\end{aligned}$$

odakle sledi traženi rezultat. Ovaj iskaz je očigledno tačan za sve ovakve dijagrame sa neparnim brojem verteksa i poznat je kao Furry-jeva teorema.

11.8 Polarizacija vakuuma u kvantnoj elektrodinamici je

$$i\Pi_{\mu\nu} = (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}) i\Pi(q^2) \ ,$$

gde je

$$\Pi(q^2) = \frac{e^2}{2\pi^2}\Big[\frac{1}{3}(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln\frac{4\pi\mu^2}{m^2}) - \int_0^1 dx\ x(1-x)\ln(1 - \frac{q^2}{m^2}x(1-x))\Big] \ .$$

(i) Definišimo veličinu $\Pi_R(q^2)$ sa

$$\Pi_R(q^2) = \Pi(q^2) - \Pi(0) \ .$$

Tada je

$$\Pi_R(q^2) = -\frac{e^2}{2\pi^2}\int_0^1 dx\ x(1-x)\ln(1 - \frac{q^2}{m^2}x(1-x)) \ . \tag{11.8-1}$$

Parcijalnom integracijom u (11.8-1) dobijamo

$$\Pi_R(q^2) = -\frac{e^2}{2\pi^2}\int_0^1 dx\ \Big(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big)\frac{\frac{q^2}{m^2}(1-2x)}{1 - \frac{q^2}{m^2}x(1-x)} \ .$$

Smenom $v = 2x - 1$ prethodni integral postaje

$$\Pi_R(q^2) = \frac{e^2}{4\pi^2}\int_0^1 dv\ \frac{v^2 - \frac{v^4}{3}}{v^2 + \frac{4m^2}{q^2} - 1} \ . \tag{11.8-2}$$

Ako definišemo integral

$$I_n = \int_0^1 dv \frac{v^n}{v^2 - c - i\epsilon} \ ,$$

lako se pokazuje da važi rekurentna veza

$$I_n - cI_{n-2} = \frac{1}{n-1} \ .$$

Integral (11.8-2) je

$$\Pi_R(q^2) = \frac{e^2}{4\pi^2}\Big[\frac{8}{9} - \frac{c}{3} + (c - \frac{c^2}{3})I_0\Big] \ , \tag{11.8-3}$$

tako da nam je preostalo da izračunamo integral I_0. Za $-\infty < q^2 < 0$ tj. $1 < c < \infty$ integral I_0 je tablični:

$$I_0 = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{4m^2}{q^2}\Big)^{-\frac{1}{2}}\ln\frac{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} - 1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} + 1} \ .$$

Za $0 < q^2 \leq 4m^2$ integral I_0 je

$$I_0 = \Big(\frac{4m^2}{q^2} - 1\Big)^{-\frac{1}{2}} \arctan \frac{1}{\sqrt{\frac{4m^2}{q^2} - 1}} \ .$$

U slučaju $4m^2 < q^2 < \infty$ podintegralna funkcija integrala I_0 ima pol u tački $v^2 = c$, te integral divergira. Sada se moramo setiti da smo ignorisali $i\epsilon$ član u propagatoru, te je pol pomeren u gornju poluravan. Kontura integracije je modifikovana u tački $v = \sqrt{c}$ jednim polukrugom poluprečnika $\rho \to 0$ koji leži u donjoj poluravni. Tako se dobija

$$I_0 = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{4m^2}{q^2}\Big)^{-\frac{1}{2}} \ln \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}}} + \frac{i\pi}{2\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}}} \ .$$

Imaginarni deo potiče od integracije po polukružnici, dok je realni deo zapravo glavna vrednost integrala. Zamenom integrala I_0 u (11.8-3) dobija se traženi rezultat. Mi ćemo ovde navesti rezultat samo za poslednji slučaj, $0 < q^2 \leq 4m^2$:

$$\Pi_R(q^2) = \frac{e^2}{4\pi^2}\Big(\frac{5}{9} + \frac{4m^2}{3q^2} - \frac{1}{3}\Big(1 + \frac{2m^2}{q^2}\Big) f(q^2)\Big) \ ,$$

gde je

$$f(q^2) = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}}} - i\pi\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \ ,$$

odakle se lako nalazi imaginardni deo funkcije $\Pi(q^2)$. Napomenimo da se imaginarni deo lako može naći kao u zadatku 11.6, što vam ostavljamo za vežbu.

(ii) Ako u integralu

$$\int_{4m^2}^{\infty} ds \ \frac{\mathrm{Im}\Pi(s)}{s(s - q^2 - i\epsilon)}$$

zamenimo izraz za imaginarni deo $\Pi(s)$ i uvedemo smenu

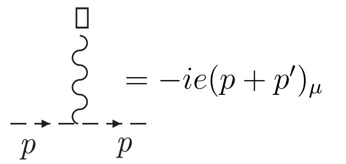
$$s = \frac{4m^2}{1 - v^2}$$

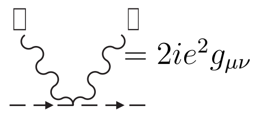
dobijamo

$$\frac{1}{q^2}\frac{e^2}{4\pi}\int_0^1 dv \ \frac{(1 - \frac{v^2}{3})v^2}{v^2 + \frac{4m^2}{q^2} - 1 - i\epsilon} \ ,$$

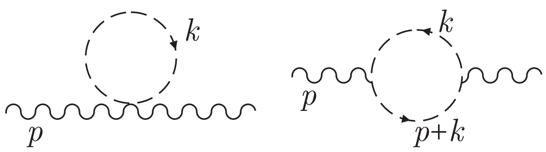
što poređenjem sa (11.8-2) daje traženu disperzionu relaciju.

11.9 U skalarnoj elektrodinamici postoje dva verteksa:





Ostala Feynman-ova pravila su standardna s tim što se svaka zatvorena fotonska petlja množi sa faktorom 1/2. Sopstvena energija fotona u skalarnoj elektrodinamici računa se na osnovu sledećih dijagrama:



Prvi dijagram je

$$-i\Pi^{(1)}_{\mu\nu} = 2ie^2 g^{\mu\nu} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{i}{k^2 - m^2} \ .$$

Primenom (11.A) i (11.F) dobijamo

$$-i\Pi^{(1)}_{\mu\nu} = -\frac{ie^2}{4\pi^2 \epsilon} m^2 g^{\mu\nu} + \text{kon. deo} \ . \tag{11.9-1}$$

Drugi dijagram je

$$-i\Pi^{(2)}_{\mu\nu} = e^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(2k+p)_\mu (2k+p)_\nu}{(k^2-m^2)((k+p)^2 - m^2)} \ .$$

Feynman-ovom parametrizacijom prethodni integral postaje

$$-i\Pi^{(2)}_{\mu\nu} = e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{4k_\mu k_\nu + 2k_\mu p_\nu + 2k_\nu p_\mu + p_\mu p_\nu}{[k^2 + 2xk\cdot p + p^2 x - m^2]^2} \ .$$

Uz formule (11.A-C) dobijamo

$$\begin{aligned} -i\Pi^{(2)}_{\mu\nu} &= \frac{ie^2 \pi^{\frac{D}{2}}}{(2\pi)^D} \int_0^1 dx \Big[\Gamma\Big(\frac{\epsilon}{2}\Big) \frac{1}{(m^2 + p^2x^2 - p^2 x)^{\frac{\epsilon}{2}}} (4x^2 - 4x + 1) p_\mu p_\nu \\ &- 2g_{\mu\nu} \frac{\Gamma\Big(\frac{\epsilon}{2} - 1\Big)}{(m^2 + p^2 x^2 - p^2 x)^{\frac{\epsilon}{2} - 1}} \Big] \ , \end{aligned}$$

što je

$$-i\Pi^{(2)}_{\mu\nu} = \frac{ie^2}{16\pi^2}\Big(\frac{2}{3\epsilon}(p_\mu p_\nu - p^2 g_{\mu\nu}) + \frac{4m^2}{\epsilon}g_{\mu\nu}\Big) + \text{kon. deo} \ . \qquad (11.9\text{-}2)$$

Sabirajući divergentne delove (11.9-1) i (11.9-2) dobija se traženi rezultat. Primetimo da se član sa m^2 krati u ovim izrazima kao i da je dobijeni izraz kalibraciono invarijantan, što smo i očekivali.

11.10 Verteks $\bar{\psi}\psi\phi$ je $ig\mu^{\frac{\epsilon}{2}}$.

(i) Na osnovu Feynman-ovih pravila imamo

$$-i\Sigma(p) = g^2\mu^\epsilon \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D}\frac{1}{(p-k)^2 - m^2 + i0}\frac{\not{k} + M}{k^2 - M^2 + i0} \ .$$

Ovaj integral je linearno divergentan.

(ii) Jednostavnim računom dobija se

$$-i\Sigma(p) = \frac{ig^2}{16\pi^2}\Big[(\frac{2}{\epsilon} - \gamma)(\frac{1}{2}\not{p} + M) - \int_0^1 dx\ (x\not{p} + M)\ln\frac{\Delta}{4\pi^2\mu^2}\Big] \ ,$$

gde je $\Delta = p^2(x^2 - x) + (1-x)M^2 + m^2 x$.

Literatura

[1] D. Bailin and A. Love, *Introduction to Gauge Field Theory*, Adam Hilger, Bristol, 1986

[2] M. Blagojević, *Gravitacija i lokalne simetrije*, Institut za fiziku, Beograd, 1997

[3] J. Bjorken and S. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1964

[4] J. Bjorken and S. Drell, *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill, New York, 1965

[5] N. N. Bogoljubov and D.V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, Wiley-Interscience, New York, 1980

[6] T.P. Cheng and L.F. Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, Oxford University Press, New York, 1984

[7] T.P. Cheng and L.F. Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics, Problems and Solutions*, Oxford University Press, New York, 2000

[8] M. Damnjanović, *Hilbertovi prostori i grupe*, Fizički fakultet, Beograd, 2000

[9] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhnik, *Table of Integrals, Series and Products*, (trans. and ed. by Alan Jeffrey), Academic Press, Orlando, Florida, 1980

[10] W. Greiner and J, Reinhardt, *Quantum Electrodinamics*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1996

[11] W. Greiner and J, Reinhardt, *Field Quantization*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1996

[12] F. Gross, *Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory*, Wiley, New York, 1993

[13] C. Itzykson and J.B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, New York, 1980

[14] M. Kaku, *Quantum Field Theory: A Modern Introduction*, Oxford University Press, New York, 1993

[15] F. Mandl and G. Show, *Quantum Field Theory*, New York, 1984

[16] D. S. Mitrinović, *Kompleksna analiza*, Građevinska knjiga, Beograd, 1989

[17] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison Wesley, 1995

[18] P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer* (second edition), Addison-Wesley, RedwoodCity, California, 1989

[19] L. Rayder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985

[20] J. J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, 1967

[21] S. S. Schweber, *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory*, Harpen and Row, New York, 1962

[22] A. G. Sveshnikov and A. N. Tikhonov, *The Theory of Functions of a Complex Variable*, Mir Publisher, Moscow, 1978

[23] G. Sterman, *Introduction to Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993

[24] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields I and II*, Cambridge University Press, New York, 1996